

Published: 2025-02-12

Mathematics

[Implementasi Inferensi Fuzzy Tsukamoto dan PERT dalam Produksi Batik di CV. Wecono Asri Kediri](#)

Nur Intan Wiji Agustin, Nur Fadilatul Ilmiah, Nalsa Cintya Resti

1-12

pdf

[Hubungan Antara Sifat Bersih dan Sifat Clear pada Semiring](#)

Galang Riki Ramadhan, Nikken Prima Puspita

13-17

pdf

[Variasi Pohon Fraktal Tiga Cabang Menggunakan L-Systems](#)

Kosala Dwidja Purnomo, Miskatul Anwar, Bagus Juliyanto, Firdaus Ubaidillah

18-26

pdf

[Fungsi Lancip dan Karakteristiknya](#)

Firdaus Ubaidillah, Kosala Dwidja Purnomo, Bagus Juliyanto

34-39

pdf

Implementasi Inferensi Fuzzy Tsukamoto dan PERT dalam Produksi Batik di CV. Wecono Asri Kediri

Nur Intan Wiji Agustin*, Nur Fadilatul Ilmiyah*, Nalsa Cintya Resti*

* Program Studi Tadris Matematika, Institut Agama Islam Negeri Kediri

Email: nurintanwigus@gmail.com, nur.fadilatul.ilmiyah@iainkediri.ac.id, nalsacintya@iainkediri.ac.id

Article Info

Article history:

Diterima : 13 November 2024

Direvisi : 9 Januari 2025

Diterbitkan : 10 Februari 2025

Keyword:

Inferensi Fuzzy Tsukamoto
Program Evaluation and
Review Technique
Produksi Batik

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan implementasi Inferensi Fuzzy Tsukamoto dalam mendukung keputusan pemilihan bahan baku produksi Batik Wecono Asri Kediri serta menjelaskan implementasi *Program Evaluation and Review Technique* (PERT) dalam memprediksi durasi produksi batik. Penelitian ini menggunakan pendekatan kuantitatif deskriptif dengan studi kasus pada CV. Wecono Asri Kediri. Teknik pengumpulan data dilakukan melalui wawancara dan studi pustaka, sedangkan analisis data menggunakan tahapan dalam Inferensi Fuzzy Tsukamoto dan PERT. Hasil penelitian menunjukkan bahwa penerapan Inferensi Fuzzy Tsukamoto dapat memberikan penilaian pada kandidat kain, canting, dan pewarna yang akan digunakan oleh produsen ke dalam tiga kategori, yaitu sangat direkomendasikan, direkomendasikan, dan kurang direkomendasikan. Implementasi PERT menunjukkan bahwa produksi batik dapat diselesaikan dalam waktu 80,83 jam.

Copyright © 20XX SIMANIS.

All rights reserved.

Corresponding Author:

Nur Fadilatul Ilmiyah

Program Studi Tadris Matematika

Institut Agama Islam Negeri Kediri

Jl. Sunan Ampel, No.7, Ngronggo, Kecamatan Kediri Kota, Kota Kediri, Jawa Timur, 64127

Email: nur.fadilatul.ilmiyah@iainkediri.ac.id

1. PENDAHULUAN

Dewasa ini, sektor barang dan jasa mengalami peningkatan yang signifikan. Industri, terutama di skala kecil dan menengah, berlomba-lomba meningkatkan keunggulannya, untuk menghadapi persaingan yang kian ketat [1]. Dalam konteks ini, penting bagi pelaku usaha untuk terus berkompetisi dalam menarik pelanggan melalui peningkatan kualitas pelayanan dan reputasi. Hal ini bertujuan agar perusahaan dapat memenuhi kebutuhan pelanggan serta membangun citra yang positif di mata masyarakat.

Dalam produksi barang, kepuasan pelanggan menjadi fokus utama. Kepuasan pelanggan adalah perasaan yang muncul dari perbandingan antara kinerja produk atau layanan dengan harapan pelanggan [2]. Menurut Hutasuht faktor penting yang mempengaruhi kepuasan pelanggan adalah kualitas produk dan ketepatan waktu pelayanan [3]. Kotler & Keller menyatakan bahwa kualitas produk adalah kemampuan produk tersebut dalam memenuhi kebutuhan konsumen [2]. Sedangkan ketepatan waktu pelayanan mencakup jangka waktu dari pemesanan hingga penerimaan barang oleh konsumen [4].

Pemilihan bahan baku yang tepat sangat penting untuk menjaga kualitas produk, karena pemilihan ini memerlukan standar kriteria sesuai kebutuhan perusahaan, seperti harga, kualitas, jumlah, ketepatan pengiriman, dan tanggapan pelanggan [5]. Kesalahan dalam memilih bahan baku dapat memengaruhi produksi dari segi kuantitas dan kualitas, sehingga pemilihan bahan baku yang tepat menjadi kunci untuk mencapai keunggulan kompetitif. Salah satu solusi untuk mengatasi masalah ini adalah dengan menggunakan Sistem

Pendukung Keputusan (SPK) berbasis Logika Fuzzy, yang mampu merepresentasikan cara berpikir manusia secara kompleks dalam menentukan bahan baku sesuai kriteria perusahaan [5].

Inferensi Fuzzy Tsukamoto merupakan sistem pendukung keputusan yang efektif dalam pemilihan bahan baku, karena mampu menangani ketidakpastian dan subjektivitas dengan memberikan fleksibilitas lebih dalam proses pengambilan keputusan, tidak terbatas pada kategori tertentu, tetapi mencakup nilai yang lebih luas [6]. Sistem ini menghasilkan aturan berdasarkan perhitungan nilai normal yang ditetapkan pada setiap variabel, menjadikannya solusi alternatif tanpa memerlukan tambahan fasilitas. Fuzzy Tsukamoto telah diterapkan di berbagai bidang, seperti pemilihan aktivitas karyawan [7], pemilihan *supplier* bahan baku [6], perdagangan [8], produksi alat tulis [9], prediksi keputusan pembelian laptop [10], penentuan pemasok bahan baku [11], dan produksi seragam [12].

Untuk menjaga kepuasan pelanggan dan memenuhi tenggat waktu pesanan, produsen perlu memberikan kepastian melalui metode perencanaan yang efektif, seperti *Program Evaluation and Review Technique* (PERT). PERT dirancang untuk mengatasi ketidakpastian waktu dalam proses produksi, sehingga membantu produsen dalam merencanakan, mengendalikan, dan memprediksi waktu penyelesaian yang lebih baik [13]. Dengan mempertimbangkan tiga estimasi waktu (optimistik, realistis, dan pesimistis), metode ini dapat meningkatkan manajemen waktu pesanan [14]. PERT telah diterapkan dalam berbagai sektor untuk optimasi waktu, seperti pada pembangunan masjid [15], produksi *wine rack* [14], penyelesaian pesanan khusus [16], dan proses produksi kain [17].

Penelitian ini dimaksudkan untuk menjelaskan implementasi metode inferensi Fuzzy Tsukamoto dan PERT dalam produksi batik dengan studi kasus di CV. Wecono Asri Kediri. Melalui penerapan kedua metode ini, diharapkan perusahaan dapat meningkatkan kepuasan pelanggan dengan pemilihan bahan baku yang lebih tepat serta penentuan durasi produksi yang lebih optimal. Kombinasi Fuzzy Tsukamoto dan PERT diharapkan dapat membantu perusahaan mengelola ketidakpastian waktu produksi, sehingga dapat memenuhi permintaan konsumen dengan lebih efektif dan efisien.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian kuantitatif deskriptif ini memungkinkan peneliti untuk mengukur durasi produksi dan pemilihan bahan baku batik di CV. Wecono Asri Kediri berdasarkan data empiris dan kuantitatif. Variabel input dalam penelitian ini meliputi jenis, harga, dan kualitas bahan baku, serta durasi setiap tahapan produksi batik. Sementara itu, variabel outputnya berupa rekomendasi pembelian bahan baku (sangat direkomendasikan, direkomendasikan, atau kurang direkomendasikan) dan prediksi durasi penyelesaian produksi batik. Data dikumpulkan melalui wawancara dengan pemilik dan karyawan CV. Wecono Asri Kediri untuk memperoleh informasi mengenai aspek utama pemilihan bahan baku dan tahapan produksi. Sedangkan studi pustaka dilakukan untuk mendapatkan data mengenai kualitas dan harga bahan baku berdasarkan preferensi pasar.

Penelitian ini berfokus pada tiga jenis bahan baku utama dalam produksi batik, yaitu kain, canting, dan pewarna. Kualitas bahan baku dievaluasi berdasarkan rating yang diberikan oleh konsumen di platform *e-commerce* Shopee, begitu juga dengan harganya. Data dikumpulkan menggunakan instrumen berupa pedoman wawancara serta matriks data untuk mencatat hasil wawancara dan studi pustaka secara sistematis. Teknik analisis data dilakukan dengan mengimplementasikan Fuzzy Tsukamoto untuk memilih bahan baku dan PERT untuk memprediksi durasi produksi batik.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Deskripsi Data

Berdasarkan hasil wawancara dengan pemilik dan karyawan CV. Wecono Asri Kediri pada tanggal 5 Januari 2024 serta studi pustaka melalui platform *e-commerce* Shopee pada tanggal 31 Januari 2024, diperoleh data pada Tabel 1, Tabel 2, Tabel 3, dan Tabel 4 sebagai berikut:

Tabel 1. Variabel Input untuk Bahan Baku Kain

No.	Kode Kain	Jenis Kain	Rating	Harga
1	K1	Prima Lampion Sanforized	4,9	Rp 18.500
2	K2	Prima Sanforized	4,9	Rp 23.500
3	K3	Prima Sanforized	3,5	Rp 10.500
4	K4	Prima Sanforized	3,2	Rp 24.500
5	K5	Rayon Banci	4,9	Rp 19.500
6	K6	Rayon Paris	2	Rp 43.000
7	K7	Rayon Banci Uniqlo	3,8	Rp 20.500
8	K8	Rayon Paris	3,4	Rp 18.000

No.	Kode Kain	Jenis Kain	Rating	Harga
9	K9	Rayon Paris	5	Rp 39.500
10	K10	Sutra Origandi Kaca	2,2	Rp 77.000
11	K11	Sutra Cutton Silk	4,8	Rp 53.000
12	K12	Sutra Cutton Silk	3	Rp 71.500
13	K13	Dobby Putih	5	Rp 26.000
14	K14	Dobby Putih PS	4,8	Rp 20.000

Tabel 2. Variabel Input untuk Bahan Baku Canting

No.	Kode Canting	Jenis Canting	Rating	Harga
1	C1	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	4,8	Rp 5.500
2	C2	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	4,8	Rp 6.000
3	C3	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	2	Rp 8.500
4	C4	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	4,9	Rp 6.000
5	C5	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	3,5	Rp 12.500
6	C6	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	2,7	Rp 4.000

Tabel 3. Variabel Input untuk Bahan Baku Pewarna

No.	Kode Pewarna	Jenis Pewarna	Rating	Harga
1	P1	Golden Yellow RNL	4,9	Rp29.500
2	P2	Golden Yellow RNL	4,8	Rp57.000
3	P3	Orange 3R	3,5	Rp36.000
4	P4	Orange 3R	5	Rp81.000
5	P5	Orange 3R	2,2	Rp18.500
6	P6	Blue KNR Full	5	Rp57.000
7	P7	Blue KNR Full	5	Rp40.000
8	P8	Blue KNR Full	2,6	Rp75.000
9	P9	Brown GR	4,9	Rp30.000
10	P10	Brown GR	2	Rp40.000
11	P11	Brown GR	4,6	Rp20.000

Tabel 4. Variabel Input Berupa Tahapan Produksi Batik Beserta Durasinya

No.	Aktivitas	Kode Aktivitas	Aktivitas Pendahulu	Durasi (Jam)		
				<i>a</i>	<i>m</i>	<i>b</i>
1.	Pengumpulan inspirasi atau ide desain	A	-	2	4	6
2.	Pembelian kain, canting, malam, dan warna berkualitas	B	-	2	5	8
3.	Mourdating (proses perebusan kain dengan larutan tawas)	C	B	2	4	6
4.	Penyusunan sketsa awal desain	D	A, W	2	3	4
5.	Pembuatan pola	E	D	8	12	18
6.	Pengecapan pola	F	C	6	10	14
7.	Pencantingan	G	F	4	8	12
8.	Persiapan warna yang sesuai dengan desain	H	-	2	3	4
9.	Pengujian warna pada kain sampel	I	H	2	4	6
10.	Pemberian warna pertama	J	I	4	8	10
11.	Pemberian warna tambahan	K	J	72	48	24
12.	Fiksasi / Penguncian Warna	L	J, K	48	24	18
13.	Persiapan bahan untuk perebusan malam (pelorotan)	M	B	1	2	3
14.	Pelorotan	N	M	4	8	10
15.	Perebusan Kain	O	N	1	2	3
16.	Pembilasan	P	O	2	4	6
17.	Pengeringan	Q	O, P	3	6	9
18.	Pengecekan kualitas kain	R	Q	1	2	3
19.	Persiapan alat untuk mengukur	S	-	1	2	3
20.	Pengukuran	T	S	3	5	7
21.	Persiapan alat dan bahan untuk menjahit	U	S, T	3	6	9
22.	Penjahitan	V	U	4	8	10
23.	Penyusunan desain kemasan yang menarik	W	A	3	4	5
24.	Persiapan logistik untuk distribusi	X	-	2	4	6
25.	Pengemasan	Y	X	2	3	5

dengan *a* = waktu tercepat, *m* = waktu normal, dan *b* = waktu terlama.

3.2. Implementasi Inferensi Fuzzy Tsukamoto

3.2.1. Proses Fuzzyfikasi

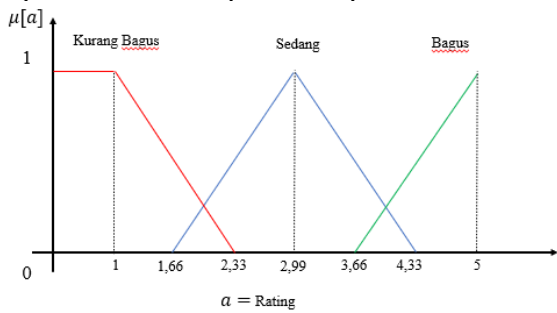
Pertama, peneliti mengidentifikasi jenis variabel, menentukan himpunan fuzzy beserta domainnya, kemudian menyatakan hasilnya dalam Tabel 5 sebagai berikut:

Implementasi Inferensi Fuzzy Tsukamoto dan PERT dalam Produksi Batik (Nur Intan Wiji Agustin)

Tabel 5. Jenis Variabel, Himpunan Fuzzy, dan Domainnya

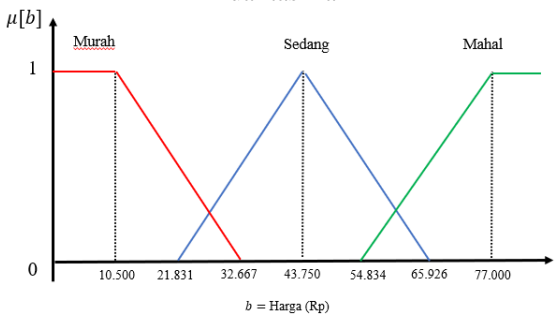
Jenis Variabel		Himpunan Fuzzy	Domain
Input	Kain	KURANG BAGUS	1 – 2,33
		SEDANG	1,66 – 4,33
		BAGUS	3,66 – 5
	Harga	MURAH	≤ 32.667
		SEDANG	21.831 – 65.926
		MAHAL	≥ 54.834
	Canting	KURANG BAGUS	1 – 2,33
		SEDANG	1,66 – 4,33
		BAGUS	3,66 – 5
Harga	MURAH	≤ 6.833	
	SEDANG	5.416 – 11.083	
	MAHAL	≥ 9.666	
Pewarna	KURANG BAGUS	1 – 2,33	
	SEDANG	1,66 – 4,33	
	BAGUS	3,66 – 5	
Harga	MURAH	≤ 39.333	
	SEDANG	28.917 – 70.582	
	MAHAL	≥ 60.166	
Output	Rekomendasi Pembelian Bahan Baku	KURANG DIREKOMENDASIKAN	2 – 3,33
		DIREKOMENDASIKAN	3,33 – 4,66
		SANGAT DIREKOMENDASIKAN	4,66 – 6

Kedua, peneliti menyusun grafik dan fungsi keanggotaan untuk setiap variabel *input* dan variabel *output*. Hasil dari tahapan ini direpresentasikan melalui Gambar 1-7 sebagai berikut:



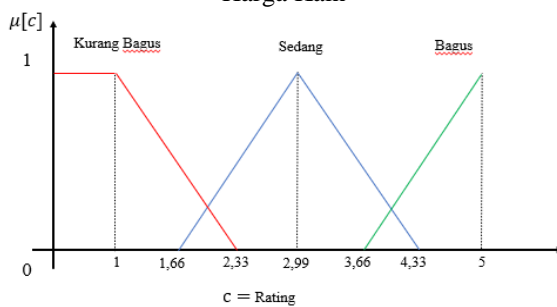
Gambar 1. Grafik Fungsi Keanggotaan Variabel Kualitas Kain

$$\mu_{KKB}(a) = \begin{cases} 0, & a \geq 2,33 \\ \frac{2,33 - a}{2,33 - 1}, & 1 \leq a \leq 2,33 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & a < 1,66 ; a \geq 4,33 \\ \frac{a - 1,66}{2,99 - 1,66}, & 1,66 < a < 2,99 \\ \frac{4,33 - a}{4,33 - 2,99}, & 2,99 < a \leq 4,33 \\ 0, & a < 3,66 \\ \frac{a - 3,66}{5 - 3,66}, & 3,66 < a \leq 5 \\ 1, & a = 5 \end{cases}$$



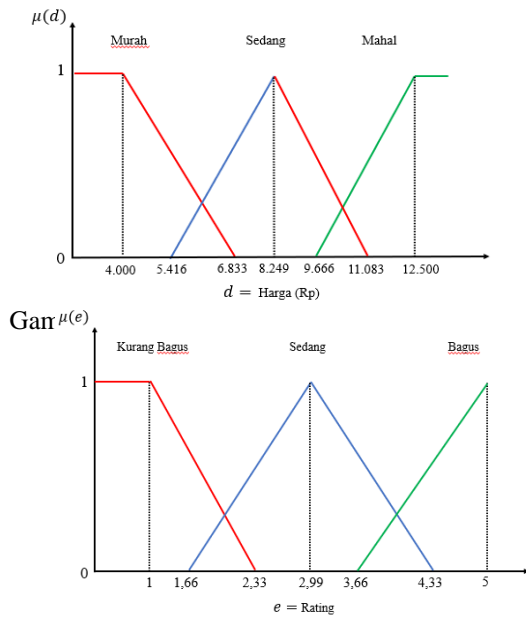
Gambar 2. Grafik Fungsi Keanggotaan Variabel Harga Kain

$$\mu_{HKM}(b) = \begin{cases} 0, & b \geq 32.667 \\ \frac{32.667 - b}{32.667 - 10.500}, & 10.500 \leq b \leq 32.667 \\ 1, & b \leq 10.500 \\ 0, & b < 21.831 ; b \geq 65.926 \\ \frac{b - 21.831}{43.750 - 21.831}, & 21.831 < b < 43.750 \\ \frac{43.750 - b}{65.926 - 43.750}, & 43.750 < b \leq 65.926 \\ 0, & b < 54.843 \\ \frac{b - 54.843}{77.000 - 54.843}, & 54.843 < b \leq 77.000 \\ 1, & x \geq 77.000 \end{cases}$$

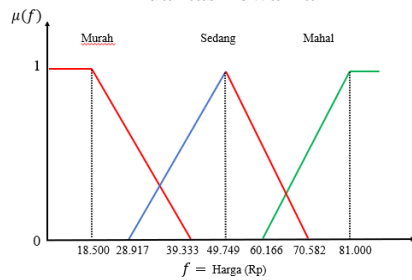


Gambar 3. Grafik Fungsi Keanggotaan Variabel Kualitas Canting

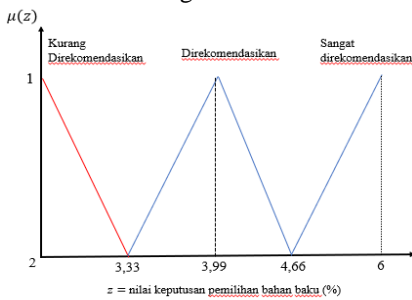
$$\mu_{KCB}(c) = \begin{cases} 0, & c \geq 2,33 \\ \frac{2,33 - c}{2,33 - 1}, & 1 \leq c \leq 2,33 \\ 1, & c = 1 \\ 0, & c < 1,66 ; c \geq 4,33 \\ \frac{c - 1,66}{2,99 - 1,66}, & 1,66 < c < 2,99 \\ \frac{4,33 - c}{4,33 - 2,99}, & 2,99 < c \leq 4,33 \\ 0, & c < 3,66 \\ \frac{c - 3,66}{5 - 3,66}, & 3,66 < c \leq 5 \\ 1, & a = 5 \end{cases}$$



Gambar 5. Grafik Fungsi Keanggotaan Variabel Kualitas Pewarna



Gambar 6. Grafik Fungsi Keanggotaan Variabel Harga Pewarna



Gambar 7. Grafik Fungsi Keanggotaan Variabel Rekomendasi Pembelian Bahan Baku

$$\mu_{HCM}(d) = \begin{cases} 0, & d \geq 6.833 \\ \frac{6.833 - d}{6.833 - 4.000}, & 4.000 \leq d \leq 6.833 \\ 1, & d \leq 4.000 \end{cases}$$

$$\mu_{HCS}(d) = \begin{cases} 0, & d < 5.416 ; d \geq 11.083 \\ \frac{d - 5.416}{8.249 - 5.416}, & 5.416 < d < 8.249 \\ \frac{11.083 - d}{11.083 - 8.249}, & 8.249 < d \leq 11.083 \end{cases}$$

$$\mu_{HCL}(d) = \begin{cases} 0, & d < 9.666 \\ \frac{d - 9.666}{12.500 - 9.666}, & 9.666 < d \leq 12.500 \\ 1, & d \geq 12.500 \end{cases}$$

$$\mu_{KPKB}(e) = \begin{cases} 0, & e \geq 2,33 \\ \frac{2,33 - e}{2,33 - 1}, & 1 \leq e \leq 2,33 \\ 1, & e = 1 \\ 0, & e < 1,66 ; e \geq 4,33 \end{cases}$$

$$\mu_{KPS}(e) = \begin{cases} \frac{e - 1,66}{2,99 - 1,66}, & 1,66 < e < 2,99 \\ \frac{4,33 - e}{4,33 - 2,99}, & 2,99 < e \leq 4,33 \end{cases}$$

$$\mu_{KPB}(e) = \begin{cases} 0, & e < 3,66 \\ \frac{e - 3,66}{5 - 3,66}, & 3,66 < e \leq 5 \\ 1, & e = 5 \end{cases}$$

$$\mu_{HPM}(f) = \begin{cases} 0, & f \geq 39.333 \\ \frac{39.333 - f}{39.333 - 0}, & 0 \leq f \leq 39.333 \end{cases}$$

$$\mu_{HPS}(f) = \begin{cases} 0, & f < 28.917 ; f \geq 70.582 \\ \frac{f - 28.917}{49.749 - 28.917}, & 28.917 < f < 49.749 \\ \frac{49.749 - f}{70.582 - 49.749}, & 49.749 < f \leq 70.582 \end{cases}$$

$$\mu_{HPL}(f) = \begin{cases} 0, & f < 60.166 \\ \frac{f - 60.166}{81.000 - 60.166}, & 60.166 < f \leq 81.000 \\ 1, & f \geq 81.000 \end{cases}$$

$$\mu_{KR}(z) = \begin{cases} 0, & z \geq 3,33 \\ \frac{3,33 - z}{3,33 - 2}, & 2 \leq z \leq 3,33 \\ 1, & z = 2 \end{cases}$$

$$\mu_{R}(z) = \begin{cases} 0, & z < 3,33 ; z \geq 4,66 \\ \frac{z - 3,33}{3,99 - 3,33}, & 3,33 < z < 3,99 \\ \frac{4,66 - z}{4,66 - 3,99}, & 3,99 < z \leq 4,66 \end{cases}$$

$$\mu_{SR}(z) = \begin{cases} 0, & z < 4,66 \\ \frac{z - 4,66}{6 - 4,66}, & 4,66 < z \leq 5 \\ 1, & z = 6 \end{cases}$$

Ketiga, peneliti menentukan derajat keanggotaan untuk masing-masing variabel input dalam himpunan Fuzzy yang terkait. Derajat keanggotaan ditentukan dengan cara mensubstitusikan nilai variabel pada fungsi keanggotaan yang saling bersesuaian. Hasil dari tahapan ini direpresentasikan dalam Tabel 6, Tabel 7, dan Tabel 8 sebagai berikut:

Tabel 6. Derajat Keanggotaan Kualitas dan Harga Kain

No.	Kode Kain	Jenis Kain	Rating	Himpunan Fuzzy			Harga	Himpunan Fuzzy		
				Kurang Bagus	Sedang	Bagus		Murah	Sedang	Mahal
1	K1	Prima Lampion Sanforized	4,9	0	0	0,925	Rp 18.500	0,639	0	0
2	K2	Prima Sanforized	4,9	0	0	0,925	Rp 23.500	0,414	0	0

No.	Kode Kain	Jenis Kain	Rating	Himpunan Fuzzy			Harga	Himpunan Fuzzy		
				Kurang Bagus	Sedang	Bagus		Murah	Sedang	Mahal
3	K3	Prima Sanforized	3,5	0	0,619403	0,000	Rp 10.500	1,000	0	0
4	K4	Prima Sanforized	3,2	0	0,8432836	0,000	Rp 24.500	0,368	0	0
5	K5	Rayon Banci	4,9	0	0	0,925	Rp 19.500	0,594	0	0
6	K6	Rayon Paris	2	0,248120301	0,2556391	0,000	Rp 43.000	0,000	1	0
7	K7	Rayon Banci Uniqlo	3,8	0	0,3955224	0,104	Rp 20.500	0,549	0	0
8	K8	Rayon Paris	3,4	0	0,6940299	0,000	Rp 18.000	0,662	0	0
9	K9	Rayon Paris	5	0	0	1,000	Rp 39.500	0,000	1	0
10	K10	Sutra Origandi Kaca	2,2	0,097744361	0,406015	0,000	Rp 77.000	0,000	0	1
11	K11	Sutra Cutton Silk	4,8	0	0	0,851	Rp 53.000	0,000	1	0
12	K12	Sutra Cutton Silk	3	0	0,9925373	0,000	Rp 71.500	0,000	0	0,75177145
13	K13	Dobby Putih	5	0	0	1,000	Rp 26.000	0,301	0	0
14	K14	Dobby Putih PS	4,8	0	0	0,851	Rp 20.000	0,571	0	0

Tabel 7. Derajat Keanggotaan Kualitas dan Harga Canting

No.	Kode Canting	Jenis Canting	Rating	Himpunan Fuzzy			Harga	Himpunan Fuzzy		
				Kurang Bagus	Sedang	Bagus		Murah	Sedang	Mahal
1	C1	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	4,8	0	0	0,851	Rp 5.500	0,471	0	0
2	C2	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	4,8	0	0	0,851	Rp 6.000	0,294	0	0
3	C3	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	2	0,248120301	0,2556391	0,000	Rp 8.500	0,000	1	0
4	C4	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	4,9	0	0	0,925	Rp 6.000	0,294	0	0
5	C5	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	3,5	0	0,619403	0,000	Rp 12.500	0,000	0	1
6	C6	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	2,7	0	0,7819549	0,000	Rp 4.000	1,000	0	0

Tabel 8. Derajat Keanggotaan Kualitas dan Harga Pewarna

No.	Kode Pewarna	Jenis Pewarna	Rating	Himpunan Fuzzy			Harga	Himpunan Fuzzy		
				Kurang Bagus	Sedang	Bagus		Murah	Sedang	Mahal
1	P1	Golden Yellow RNL	4,9	0	0	0,925	Rp29.500	0,472	0	0
2	P2	Golden Yellow RNL	4,8	0	0	0,851	Rp57.000	0,000	1	0
3	P3	Orange 3R	3,5	0	0,619403	0,000	Rp36.000	0,160	0	0
4	P4	Orange 3R	5	0	0	1,000	Rp81.000	0,000	0	1
5	P5	Orange 3R	2,2	0,097744361	0,406015	0,000	Rp18.500	1,000	0	0
6	P6	Blue KNR Full	5	0	0	1,000	Rp57.000	0,000	1	0
7	P7	Blue KNR Full	5	0	0	1,000	Rp40.000	0,000	1	0
8	P8	Blue KNR Full	2,6	0	0,7067669	0,000	Rp75.000	0,000	0	0,71200922
9	P9	Brown GR	4,9	0	0	0,925	Rp30.000	0,448	0	0
10	P10	Brown GR	2	0,248120301	0,2556391	0,000	Rp40.000	0,000	1	0
11	P11	Brown GR	4,6	0	0	0,701	Rp20.000	0,928	0	0

3.2.2. Proses Inferensi

Pertama, peneliti menyusun Fuzzy Rules untuk setiap bahan baku batik. Diperoleh sembilan aturan Fuzzy untuk masing-masing bahan baku. Hasil dari tahapan ini secara ringkas dinyatakan dalam Tabel 9.

Kedua, peneliti mengimplementasikan fungsi min untuk menentukan nilai tingkat kepastian (*fire strength* atau α -predikat). Hasil ringkas dari tahapan ini direpresentasikan dalam Tabel 10, Tabel 11, dan Tabel 12.

Tabel 9. Fuzzy Rules untuk Keputusan Rekomendasi Pembelian Bahan Baku Kain, Canting, dan Pewarna

Rules	IF		THEN
	Kualitas Kain/ Canting/ Pewarna	Harga Kain/ Canting/ Pewarna	
R1	Kurang Bagus	Murah	Sangat Direkomendasikan
R2	Kurang Bagus	Sedang	Direkomendasikan
R3	Kurang Bagus	Mahal	Kurang Direkomendasikan
R4	Sedang	Murah	Sangat Direkomendasikan
R5	Sedang	Sedang	Direkomendasikan
R6	Sedang	Mahal	Kurang Direkomendasikan
R7	Bagus	Murah	Sangat Direkomendasikan
R8	Bagus	Sedang	Direkomendasikan
R9	Bagus	Mahal	Kurang Direkomendasikan

Tabel 10. Hasil Perhitungan *Fire Strength* untuk Bahan Baku Kain

Kode Kain	Rules	Derajat Keanggotaan Variabel Kualitas	Derajat Keanggotaan Variabel Harga	<i>Fire Strength</i> (α_n)
K1	R7	0,92537	0,6391	0,6391
K2	R7	0,92537	0,41354	0,41354
K3	R8	0,92537	0,07614	0,07614
K4	R4	0,6194	1	0,6194
K5	R4	0,84328	0,36843	0,36843
K6	R5	0,84328	0,12177	0,12177
K7	R7	0,92537	0,59399	0,59399
K8	R2	0,24812	0,96578	0,24812
K9	R5	0,25564	0,96578	0,25564
K10	R4	0,39552	0,54888	0,39552
K11	R7	0,10448	0,54888	0,10448
K12	R4	0,69403	0,66166	0,66166
K13	R8	1	0,8061	0,8061
K14	R3	0,09774	1	0,09774
	R6	0,40602	1	0,40602
	R8	0,85075	0,58288	0,58288
	R6	0,99254	0,75177	0,75177
	R7	1	0,30076	0,30076
	R8	1	0,1902	0,1902
	R7	0,85075	0,57144	0,57144

Tabel 11. Hasil Perhitungan *Fire Strength* untuk Bahan Baku Canting

Kode Canting	Rules	Derajat Keanggotaan Variabel Kualitas	Derajat Keanggotaan Variabel Harga	<i>Fire Strength</i> (α_n)
C1	R7	0,850746	0,47053	0,47053
	R8	0,850746	0,02965	0,02965
C2	R7	0,850746	0,29403	0,29403
	R8	0,850746	0,20614	0,20614
C3	R2	0,24812	0,91143	0,24812
	R5	0,255639	0,91143	0,25564
C4	R7	0,925373	0,29403	0,29403
	R8	0,925373	0,20614	0,20614
C5	R6	0,619403	1	0,6194
C6	R4	0,781955	1	0,78195

Tabel 12. Hasil Perhitungan *Fire Strength* untuk Bahan Baku Pewarna

Kode Pewarna	Rules	Derajat Keanggotaan Variabel Kualitas	Derajat Keanggotaan Variabel Harga	<i>Fire Strength</i> (α_n)
P1	R7	0,925373	0,47199	0,47199
	R8	0,925373	0,02799	0,02799
P2	R8	0,850746	0,65195	0,65195
P3	R4	0,619403	0,15999	0,15999
	R5	0,619403	0,34001	0,34001
P4	R9	1	1	1
P5	R1	0,097744	1	0,09774
	R4	0,406015	1	0,40602
P6	R8	1	0,65195	0,65195
P7	R8	1	0,53202	0,53202
P8	R6	0,706767	0,71201	0,70677
	R7	0,925373	0,44799	0,44799
P9	R8	0,925373	0,05199	0,05199
	R2	0,24812	0,53202	0,24812
P10	R5	0,255639	0,53202	0,25564
P11	R7	0,701493	0,928	0,70149

3.2.2. Proses Defuzzifikasi

Pertama, peneliti menentukan nilai *crisp* hasil inferensi fuzzy (z_n) untuk setiap aturan fuzzy. Nilai *crisp* hasil inferensi fuzzy diperoleh dengan cara memasukkan nilai *fire strength* pada fungsi keanggotaan variabel rekomendasi pembelian bahan baku yang saling bersesuaian. Hasil dari tahapan ini dinyatakan dalam Tabel 13, Tabel 14, dan Tabel 15 sebagai berikut:

Tabel 13. Nilai *Crips* Hasil Inferensi untuk Bahan Baku Kain

Kode Kain	Rules	Fire Strength (α_n)	Nilai <i>Crips</i> Hasil Inverensi (z_n)
K1	R7	0,6391	5,5164
	R7	0,41354	5,21415
K2	R8	0,07614	4,60898
	R4	0,6194	5,49
K3	R4	0,36843	5,1537
	R5	0,12177	4,57842
K4	R7	0,59399	5,45595
	R2	0,24812	4,49376
K5	R5	0,25564	4,48872
	R4	0,39552	5,19
K6	R7	0,10448	4,8
	R4	0,66166	5,54662
K7	R8	0,8061	4,11991
	R3	0,09774	3,2
K8	R6	0,40602	2,79
	R8	0,58288	4,26947
K9	R6	0,75177	2,33014
	R7	0,30076	5,06302
K10	R8	0,1902	4,53257
	R7	0,57144	5,42572

Tabel 14. Nilai *Crips* Hasil Inferensi untuk Bahan Baku Canting

Kode Canting	Rules	Fire Strength (α_n)	Nilai <i>Crips</i> Hasil Inverensi (z_n)
C1	R7	0,47053	5,2905
	R8	0,02965	4,64013
C2	R7	0,29403	5,05401
	R8	0,20614	4,52188
C3	R2	0,24812	4,49376
	R5	0,25564	4,48872
C4	R7	0,29403	5,05401
	R8	0,20614	4,52188
C5	R6	0,6194	2,50619
	R4	0,78195	5,70782

Tabel 15. Nilai *Crips* Hasil Inferensi untuk Bahan Baku Pewarna

Kode Pewarna	Rules	Fire Strength (α_n)	Nilai <i>Crips</i> Hasil Inverensi (z_n)
P1	R7	0,47199	5,29247
	R8	0,02799	4,64125
P2	R8	0,65195	4,2232
	R4	0,15999	4,87438
P3	R5	0,34001	4,4322
	R9	1	2
P4	R1	0,09774	4,79098
	R4	0,40602	5,20406
P5	R8	0,65195	4,2232
	R8	0,53202	4,30355
P6	R6	0,70677	2,39
	R7	0,44799	5,26031
P7	R8	0,05199	4,62517
	R2	0,24812	4,49376
P8	R5	0,25564	4,48872
	R7	0,70149	5,6

Kedua, peneliti menghitung rata-rata terbobot dari nilai *crips* (z_n) untuk masing-masing jenis bahan baku, kemudian memberikan keputusan rekomendasi pembelian bahan baku berdasarkan nilai keanggotaan dari z , yang dihitung dengan menggunakan formula sebagai berikut:

$$z = \frac{\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_n z_n}{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n}$$

Hasil dari tahapan ini dapat diamati melalui Tabel 16, Tabel 17, dan Tabel 18 sebagai berikut:

Tabel 16. Hasil Keputusan Rekomendasi Pembelian Bahan Baku Kain

No.	Kode Kain	Jenis Kain	Rating	Harga	Rata-rata Terbobot (z)	Kategori Keputusan Rekomendasi
1	K1	Prima Lampion Sanforized	4,9	Rp 18.500	5,5164	Sangat Direkomendasikan
2	K2	Prima Sanforized	4,9	Rp 23.500	5,12	Sangat Direkomendasikan
3	K3	Prima Sanforized	3,5	Rp 10.500	5,49	Sangat Direkomendasikan
4	K4	Prima Sanforized	3,2	Rp 24.500	5,0108	Sangat Direkomendasikan
5	K5	Rayon Banci	4,9	Rp 19.500	5,45595	Sangat Direkomendasikan
6	K6	Rayon Paris	2	Rp 43.000	4,4912	Direkomendasikan
7	K7	Rayon Banci Uniql	3,8	Rp 20.500	5,10851	Sangat Direkomendasikan

No.	Kode Kain	Jenis Kain	Rating	Harga	Rata-rata Terbobot (z)	Kategori Keputusan Rekomendasi
8	K8	Rayon Paris	3,4	Rp 18.000	5,54662	Sangat Direkomendasikan
9	K9	Rayon Paris	5	Rp 39.500	4,11991	Direkomendasikan
10	K10	Sutra Origandi Kaca	2,2	Rp 77.000	2,86955	Kurang Direkomendasikan
11	K11	Sutra Cutton Silk	4,8	Rp 53.000	4,26947	Direkomendasikan
12	K12	Sutra Cutton Silk	3	Rp 71.500	2,33014	Kurang Direkomendasikan
13	K13	Dobby Putih	5	Rp 26.000	4,85752	Sangat Direkomendasikan
14	K14	Dobby Putih PS	4,8	Rp 20.000	5,42572	Sangat Direkomendasikan

Tabel 16 menunjukkan bahwa dari empat belas kain yang terdata sebagai bahan baku produksi batik, terdapat sembilan kain dengan keputusan rekomendasi kategori "Sangat Direkomendasikan", tiga kain dengan kategori "Direkomendasikan", dan dua kain dengan kategori "Kurang Direkomendasikan".

Tabel 17. Hasil Keputusan Rekomendasi Pembelian Bahan Baku Canting

No.	Kode Canting	Jenis Canting	Rating	Harga	Rata-rata Terbobot (z)	Kategori Keputusan Rekomendasi
1	C1	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	4,8	Rp 5.500	5,25195	Sangat Direkomendasikan
2	C2	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	4,8	Rp 6.000	4,8347	Sangat Direkomendasikan
3	C3	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	2	Rp 8.500	4,4912	Direkomendasikan
4	C4	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	4,9	Rp 6.000	4,8347	Sangat Direkomendasikan
5	C5	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	3,5	Rp 12.500	2,50619	Kurang Direkomendasikan
6	C6	Canting Cucuk 1 No 1,2,3,4,5	2,7	Rp 4.000	5,70782	Sangat Direkomendasikan

Tabel 17 menunjukkan bahwa dari enam canting yang terdata sebagai bahan baku produksi batik, terdapat empat canting dengan keputusan rekomendasi kategori "Sangat Direkomendasikan", satu canting dengan kategori "Direkomendasikan", dan satu canting dengan kategori "Kurang Direkomendasikan".

Tabel 18. Hasil Keputusan Rekomendasi Pembelian Bahan Baku Pewarna

No.	Kode Pewarna	Jenis Pewarna	Rating	Harga	Rata-rata Terbobot (z)	Kategori Keputusan Rekomendasi
1	P1	Golden Yellow RNL	4,9	Rp29.500	5,25602	Sangat Direkomendasikan
2	P2	Golden Yellow RNL	4,8	Rp57.000	4,2232	Direkomendasikan
3	P3	Orange 3R	3,5	Rp36.000	4,57369	Direkomendasikan
4	P4	Orange 3R	5	Rp81.000	2	Kurang Direkomendasikan
5	P5	Orange 3R	2,2	Rp18.500	5,12391	Sangat Direkomendasikan
6	P6	Blue KNR Full	5	Rp57.000	4,2232	Direkomendasikan
7	P7	Blue KNR Full	5	Rp40.000	4,30355	Direkomendasikan
8	P8	Blue KNR Full	2,6	Rp75.000	2,39	Kurang Direkomendasikan
9	P9	Brown GR	4,9	Rp30.000	5,19427	Sangat Direkomendasikan
10	P10	Brown GR	2	Rp40.000	4,4912	Direkomendasikan
11	P11	Brown GR	4,6	Rp20.000	5,6	Sangat Direkomendasikan

Tabel 18 menunjukkan bahwa dari sebelas pewarna yang terdata sebagai bahan baku produksi batik, terdapat empat pewarna dengan keputusan rekomendasi kategori "Sangat Direkomendasikan", lima pewarna dengan kategori "Direkomendasikan", dan dua pewarna dengan kategori "Kurang Direkomendasikan".

3.3. Implementasi PERT

Pertama, peneliti menghitung estimasi waktu untuk setiap kegiatan (*te*) dengan menggunakan formula $te = \frac{a+4m+b}{6}$. Hasil dari tahapan ini dinyatakan dalam Tabel 19 sebagai berikut:

Tabel 19. Estimasi Waktu untuk Setiap Kegiatan

No.	Aktivitas	Kode Aktivitas	Aktivitas Pendahulu	Durasi (Jam)			<i>te</i>
				<i>a</i>	<i>m</i>	<i>b</i>	
1.	Pengumpulan inspirasi atau ide desain	A	-	2	4	6	4
2.	Pembelian kain, canting, malam, dan warna berkualitas	B	-	2	5	8	5
3.	Mourdating (proses perebusan kain dengan larutan tawas)	C	B	2	4	6	4
4.	Penyusunan sketsa awal desain	D	A, W	2	3	4	3
5.	Pembuatan pola	E	D	8	12	18	12,33
6.	Pengecapan pola	F	C	6	10	14	10
7.	Pencantingan	G	F	4	8	12	8
8.	Persiapan warna yang sesuai dengan desain	H	-	2	3	4	3
9.	Pengujian warna pada kain sampel	I	H	2	4	6	4
10.	Pemberian warna pertama	J	I	4	8	10	7,67

No.	Aktivitas	Kode Aktivitas	Aktivitas Pendahulu	Durasi (Jam)			te
				a	m	b	
11.	Pemberian warna tambahan	K	J	30	40	50	40
12.	Fiksasi / Penguncian Warna	L	J, K	18	26	35	26,16
13.	Persiapan bahan untuk perebusan malam (pelorotan)	M	B	1	2	3	2
14.	Pelorotan	N	M	4	8	10	7,67
15.	Perebusan Kain	O	N	1	2	3	2
16.	Pembilasan	P	O	2	4	6	4
17.	Pengeringan	Q	O, P	3	6	9	6
18.	Pengecekan kualitas kain	R	Q	1	2	3	2
19.	Persiapan alat untuk mengukur	S	-	1	2	3	2
20.	Pengukuran	T	S	3	5	7	5
21.	Persiapan alat dan bahan untuk menjahit	U	S, T	3	6	9	6
22.	Penjahitan	V	U	5	8	10	7,83
23.	Penyusunan desain kemasan yang menarik	W	A	3	4	5	4
24.	Persiapan logistik untuk distribusi	X	-	2	4	6	4
25.	Pengemasan	Y	X	2	3	5	3,16

Kedua, peneliti melakukan perhitungan maju dengan menggunakan formula $EF = ES + te$, dan perhitungan mundur dengan formula $LS = LF - te$. Dalam hal ini, ES = waktu mulai awal, EF = waktu selesai awal, LF = waktu selesai akhir, dan LS = waktu selesai awal. Hasil dari tahapan ini dinyatakan dalam Tabel 20 sebagai berikut:

Tabel 20. Hasil Perhitungan Maju dan Perhitungan Mundur

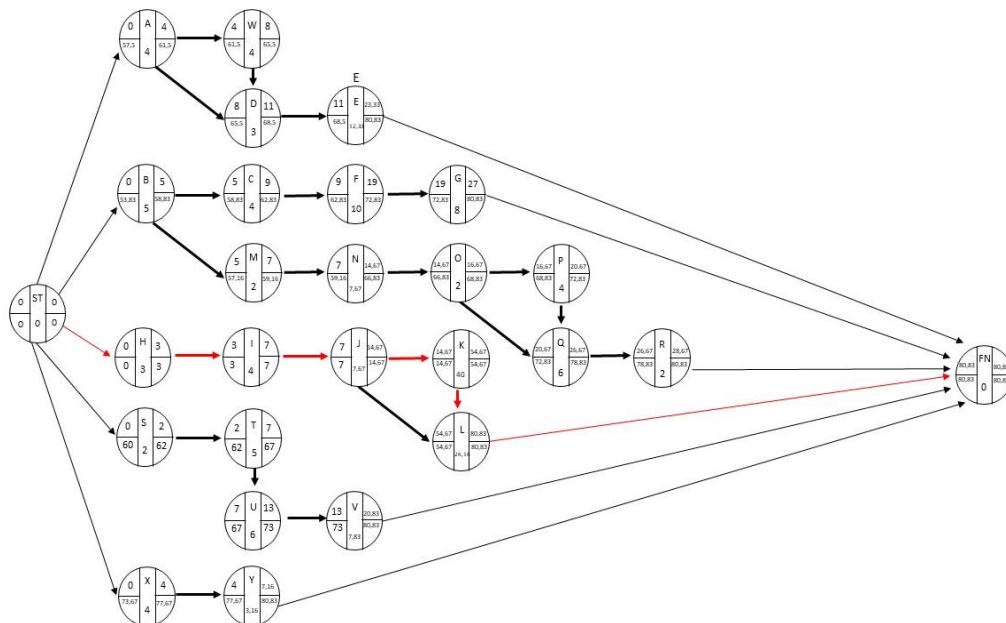
No	Aktivitas	Kode Aktivitas	Aktivitas Pendahulu	Perhitungan Maju (Jam)			Perhitungan Mundur (Jam)		
				ES	te	EF	LF	te	LS
1.	Pengumpulan inspirasi atau ide desain	A	-	0	4	4	61,5	4	57,5
2.	Pembelian kain, canting, malam, dan warna berkualitas	B	-	0	5	5	57,16	5	52,16
3.	Mourdating (proses perebusan kain dengan larutan tawas)	C	B	5	4	9	62,83	4	58,83
4.	Penyusunan sketsa awal desain	D	A, W	8	3	11	68,5	3	65,5
5.	Pembuatan pola	E	D	11	12,33	23,33	80,83	12,33	68,5
6.	Pengecapan pola	F	C	9	10	19	72,83	10	62,83
7.	Pencantingan	G	F	19	8	27	80,83	8	72,83
8.	Persiapan warna yang sesuai dengan desain	H	-	0	3	3	3	3	0
9.	Pengujian warna pada kain sampel	I	H	3	4	7	7	4	3
10.	Pemberian warna pertama	J	I	7	7,67	14,67	14,67	7,67	7
11.	Pemberian warna tambahan	K	J	14,67	40	54,67	54,67	40	14,67
12.	Fiksasi / Penguncian Warna	L	J, K	54,67	26,16	80,83	80,83	26,16	54,67
13.	Persiapan bahan untuk perebusan malam (pelorotan)	M	B	5	2	7	59,16	2	57,16
14.	Pelorotan	N	M	7	7,67	14,67	66,83	7,67	59,16
15.	Perebusan Kain	O	N	14,67	2	16,67	68,83	2	66,83
16.	Pembilasan	P	O	14,67	4	16,67	72,83	4	68,83
17.	Pengeringan	Q	O, P	20,67	6	26,67	78,83	6	72,83
18.	Pengecekan kualitas kain	R	Q	26,67	2	28,67	80,83	2	78,83
19.	Persiapan alat untuk mengukur	S	-	0	2	2	62	2	60
20.	Pengukuran	T	S	2	5	7	67	5	62
21.	Persiapan alat dan bahan untuk menjahit	U	S, T	7	6	13	73	6	67
22.	Penjahitan	V	U	13	7,83	20,83	80,83	7,83	73
23.	Penyusunan desain kemasan yang menarik	W	A	4	4	8	65,5	4	61,5
24.	Persiapan logistik untuk distribusi	X	-	0	4	4	77,67	4	73,67
25.	Pengemasan	Y	X	4	3,16	7,16	80,83	3,16	77,67

Ketiga, peneliti menentukan *time slack* untuk masing-masing kegiatan dengan menggunakan formula $Slack = |EF - LF|$, kemudian menentukan kegiatan yang kritis. Kegiatan kritis adalah kegiatan yang tidak dapat ditunda penyelesaiannya, karena penundaan pada kegiatan ini akan memperpanjang durasi keseluruhan proyek. Sebaliknya, kegiatan non-kritis memiliki toleransi keterlambatan yang sebanding dengan waktu *slack*-nya. Hasil dari tahapan ini direpresentasikan dalam Tabel 21 sebagai berikut:

Tabel 21. Hasil Perhitungan *Time Slack* dan Penentuan Kegiatan Kritis

No	Kode Aktivitas	Kegiatan Pendahulu	te	EF	LF	Slack	Keterangan
1.	A	-	4	4	61,5	57,5	Tidak Kritis
2.	B	-	5	5	57,16	52,16	Tidak Kritis
3.	C	B	4	9	62,83	53,83	Tidak Kritis
4.	D	A, W	3	11	68,5	57,5	Tidak Kritis
5.	E	D	12,33	23,33	80,83	57,5	Tidak Kritis
6.	F	C	10	19	72,83	53,83	Tidak Kritis
7.	G	F	8	27	80,83	53,83	Tidak Kritis
8.	H	-	3	3	3	0	Kritis
9.	I	H	4	7	7	0	Kritis
10.	J	I	7,67	14,67	14,67	0	Kritis
11.	K	J	40	54,67	54,67	0	Kritis
12.	L	J, K	26,16	80,83	80,83	0	Kritis
13.	M	B	2	7	59,16	52,16	Tidak Kritis
14.	N	M	7,67	14,67	66,83	52,16	Tidak Kritis
15.	O	N	2	16,67	68,83	52,16	Tidak Kritis
16.	P	O	4	16,67	72,83	56,16	Tidak Kritis
17.	Q	O, P	6	26,67	78,83	52,16	Tidak Kritis
18.	R	Q	2	28,67	80,83	52,16	Tidak Kritis
19.	S	-	2	2	62	60	Tidak Kritis
20.	T	S	5	7	67	60	Tidak Kritis
21.	U	S, T	6	13	73	60	Tidak Kritis
22.	V	U	7,83	20,83	80,83	60	Tidak Kritis
23.	W	A	4	8	65,5	57,5	Tidak Kritis
24.	X	-	4	4	77,67	73,67	Tidak Kritis
25.	Y	X	3,16	7,16	80,83	73,67	Tidak Kritis

Keempat, peneliti menyusun diagram jaringan kerja dan menentukan jalur kritis. Hasil dari tahapan ini dapat diamati melalui Gambar 8. Berdasarkan hasil analisis jaringan kerja pada Gambar 8, diperoleh waktu penyelesaian produksi batik di CV. Wecono Asri Kediri secara keseluruhan sebesar 80,83 jam. Jalur kritis terjadi pada rangkaian kegiatan H-I-J-K-L, dengan syarat bahwa kegiatan J dan K harus selesai terlebih dahulu sebelum kegiatan L dapat dimulai.



Gambar 8. Diagram Jaringan Kerja dan Jalur Kritisnya

4. KESIMPULAN

Penelitian ini menerapkan metode Inferensi Fuzzy Tsukamoto untuk mendukung pemilihan bahan baku produksi batik di CV. Wecono Asri Kediri. Hasil analisis menunjukkan bahwa dari empat belas jenis kain yang tersedia, sembilan kain termasuk kategori “sangat direkomendasikan”, tiga kain “direkomendasikan”, dan

dua kain “kurang direkomendasikan”. Untuk enam jenis canting, terdapat empat canting yang termasuk dalam kategori “sangat direkomendasikan”, satu canting “direkomendasikan”, dan satu canting “kurang direkomendasikan”. Sementara itu, dari sebelas jenis pewarna, empat di antaranya termasuk kategori “sangat direkomendasikan”, lima pewarna “direkomendasikan”, dan dua pewarna “kurang direkomendasikan.”

Penelitian ini juga memanfaatkan PERT untuk memprediksi durasi produksi. Berdasarkan hasil perhitungan, proses produksi batik di CV. Wecono Asri Kediri dapat diselesaikan dalam waktu 80,83 jam. Adapun kegiatan yang tidak boleh mengalami keterlambatan mencakup, persiapan warna yang sesuai dengan desain, pengujian warna pada kain sampel, pemberian warna pertama, pemberian warna tambahan, dan fiksasi/penguncian warna.

UCAPAN TERIMAKASIH

Ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya disampaikan kepada seluruh pihak yang telah berkontribusi dalam penelitian dan penyusunan artikel ini, terutama kepada CV. Wecono Asri Kediri atas dukungan dan fasilitas yang diberikan selama proses penelitian.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Kementerian Perindustrian, “Persaingan Sangat Ketat,” 2013. [Online]. Available: <https://kemenperin.go.id/artikel/7835/Persaingan-Sangat-Ketat>.
- [2] P. Kotler and K. L. Keller, *Marketing Management*, 15th-Globa ed. England: Battista, Donna, 2016.
- [3] N. A. Hutasuhut, N. Sahputra, and A. Firah, “Pengaruh Kualitas Produk dan Ketepatan Waktu Terhadap Kepuasan Konsumen Pada CV. Harco Nandy Medan,” *J. Bisnis Corp.*, vol. 7, no. 2, pp. 41–53, 2022.
- [4] D. Dewantoro, L. Aryani, and F. Marzuki, “Pengaruh Kualitas Pelayanan, Ketepatan Waktu Pengiriman dan Fasilitas Tracking Sistem Terhadap Kepuasan Pelanggan JNE,” *Repos. Univ. Pembang. Nas. Veteran Jakarta*, pp. 1–18, 2020.
- [5] D. E. Kurniawan and Pujiyono, “Sistem Pendukung Keputusan Pemilihan Pemasok Bahan Baku Menggunakan Metode Technique for Order Preference by Similarity to Ideal Solution,” *J. Integr. - Politek. Negeri Batam*, vol. 8, no. 1, pp. 56–60, 2016.
- [6] Y. D. Guritno, I. F. Astuti, and A. Suyatno, “Sistem Pendukung Keputusan Penentuan Supplier Bahan Baku Katering Cv . Riyanis Sekarsari Mandiri Menggunakan Metode Fuzzy Tsukamoto,” *Pros. Semin. Nas. Ilmu Komput. dan Teknol. Inf.*, vol. 2, no. 2, pp. 22–26, 2017.
- [7] P. Hanif, “Analisis Implementasi Metode Fuzzy Pada Pemilihan Aktifitas Karyawan Di Masa Pandemi Di Warunk Upnormal,” Universitas Medan Area, 2021.
- [8] M. Sari, Azanuddin, and R. Mahyuni, “Fuzzy Tsukamoto Pada Neko – Neko Bakery,” *J. CyberTech*, pp. 1–10, 2020.
- [9] M. Sihotang and M. Sagala, “Sistem Pendukung Keputusan Penentuan Produksi Alat Tulis Kantor Menggunakan Metode Fuzzy Tsukamoto,” *J. Tek. Inform. Unika St. Thomas*, vol. 02, pp. 47–57, 2017.
- [10] N. F. Ilmiyah and N. C. Resti, “Implementasi Inferensi Fuzzy Tsukamoto dalam Memprediksi Keputusan Pembelian Laptop,” *J. Math. Educ. Sci.*, vol. 5, no. 1, pp. 23–30, 2022, doi: 10.32665/james.v5i1.374.
- [11] G. D. Santika, W. F. Mahmudy, M. Ilmu, K. Informatika, P. Teknologi, and I. Komputer, “Penentuan Pemasok Bahan Baku Menggunakan Fuzzy Inference System Tsukamoto,” *Semin. Nas. Sist. Inf. Indones. Univ. Brawijaya*, pp. 1–8, 2015.
- [12] A. P. Kusuma, W. D. Puspitasari, and T. Gustiyoto, “Sistem Pendukung Keputusan Dalam Menentukan Jumlah Produksi Seragam Menggunakan Metode Fuzzy Tsukamoto,” *Antivirus J. Ilm. Tek. Inform.*, vol. 12, no. 1, pp. 1–14, 2018, doi: 10.35457/antivirus.v12i1.431.
- [13] I. I. Soeharto, *Manajemen Proyek (Dari Konseptual Sampai Operasional)*, Edisi Kedu. Ciracas, Jakarta: ERLANGGA, 1999.
- [14] N. R. Rahmawati and S. M. Scholastika, “Optimalisasi Waktu Produksi Wine Rack Terhadap Permintaan Ekspor Pada PT . Alis Jaya Ciptatama Dengan Menggunakan Metode PERT Optimization Of Wine Rack Production Time For Export Demand at PT . Jaya Ciptatama Using The PERT Method,” *J. Jumbiwar*, vol. 2, no. 2, pp. 1–19, 2023.
- [15] R. A. Husna, N. F. Ilmiyah, and N. C. Resti, “Implementasi CPM dan PERT dalam Memprediksi Durasi serta Biaya Pembangunan Musala Al-Ikhlas di Kotawaringin Barat,” *J. Focus Action Res. Math. (Factor M)*, vol. 5, no. 1, pp. 97–109, 2022, doi: 10.30762/f_m.v5i1.633.
- [16] A. Ginanjar, “Optimasi Waktu Penyelesaian Pesanan Khusus Produksi Gitar Accoustic pada CV. Butanza Banyuwangi dengan Kombinasi Metode PERT Dan CPM,” *Skripsi*, p. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam. Uni, 2016.
- [17] J. Neni, “Analisis Network Proses Produksi Kain Grey Pada Departemen Weaving PT Busana Mulya Textile Karanganyar,” Universitas Sebelas Maret Surakarta, 2012.

Hubungan Antara Sifat Bersih dan Sifat *Clear* pada Semiring

Galang Riki Ramadhan¹, Nikken Prima Puspita²^{1,2}Jurusan Matematika, Universitas Diponegoro

galangrikiramadhan@students.undip.ac.id, nikkenprima@lecturer.undip.ac.id

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 13 November 2024

Direvisi: 10 Januari 2025

Diterbitkan: 10 Februari 2025

Kata Kunci:

Semiring

Bersih

Clear

Semiring Bersih

Semiring *Clear*

ABSTRAK

Diberikan semiring $(S, +, \cdot)$ dengan elemen satuan 1_S . Semiring S dikatakan bersih, jika untuk setiap elemen tak nol di S dapat dinyatakan sebagai jumlahan suatu elemen unit dan suatu elemen idempoten di S . Semiring S dikatakan *clear*, jika untuk setiap elemen tak nol di dalam S dapat dinyatakan sebagai jumlahan suatu elemen unit dan suatu elemen unit reguler S . Pada penelitian ini, dijelaskan hubungan semiring bersih dan semiring *clear*. Setiap semiring bersih merupakan semiring *clear*, tetapi tidak berlaku sebaliknya.

Copyright © 20XX SIMANIS.

All rights reserved.

Korespondensi:

Galang Riki Ramadhan,

Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro,

Jl. Prof. Jacub Rais, Tembalang, Semarang

galangrikiramadhan@students.undip.ac.id

1. PENDAHULUAN

Misalkan R adalah suatu himpunan tak kosong dan pada R didefinisikan dua buah operasi biner $+$ dan \cdot , yang selanjutnya disebut operasi penjumlahan dan perkalian. Himpunan R disebut ring terhadap operasi penjumlahan $+$ dan perkalian \cdot , jika $(R, +)$ merupakan grup komutatif, operasi perkalian di R bersifat asosiatif (yang berarti (R, \cdot) merupakan semigrup), serta operasi penjumlahan dan perkalian di R memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan [1]. Selanjutnya, himpunan tak kosong R disebut semiring terhadap operasi penjumlahan $+$ dan perkalian \cdot , jika $(R, +)$ merupakan monoid komutatif, (R, \cdot) merupakan semigrup, serta operasi penjumlahan dan perkalian di R memenuhi sifat distributif kiri dan distributif kanan [2]. Semiring S dikatakan semiring dengan elemen satuan 1_S jika terdapat 1_S pada S sedemikian sehingga untuk setiap elemen a pada S berlaku $1_S \cdot a = a \cdot 1_S = a$ [2].

Pada teori ring, terdapat istilah elemen idempoten, elemen unit, dan elemen unit reguler. Elemen idempoten adalah suatu elemen pada ring yang apabila dikalikan terhadap dirinya sendiri akan memberikan hasil yang tetap atau identik dengan elemen aslinya [3]. Dengan kata lain, suatu elemen a pada ring $(R, +, \cdot)$ dikatakan idempoten, jika berlaku $a^2 = a$. Elemen unit adalah suatu elemen pada ring yang mempunyai invers terhadap operasi perkalian [4]. Dengan kata lain, suatu elemen a pada ring $(R, +, \cdot)$ dikatakan unit, jika terdapat a^{-1} di $(R, +, \cdot)$ sedemikian sehingga $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1_R$, dimana 1_R merupakan elemen satuan pada ring R . Selanjutnya, suatu elemen a pada ring $(R, +, \cdot)$ dikatakan sebagai unit reguler, jika $a = a \cdot u \cdot a$, untuk suatu elemen unit u [5].

Pada tahun 1977, Nicholson telah memperkenalkan konsep mengenai ring bersih, yaitu suatu ring yang setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antara elemen idempoten dengan elemen unit ring tersebut. Penelitian ini kemudian dilanjutkan oleh Chen pada tahun 2008, yang membahas mengenai sifat-sifat ring bersih, dan kemudian diperumum oleh Kar pada tahun 2023, yang membahas mengenai semiring bersih. Selanjutnya, pada tahun 2021, Zabavsky telah memperkenalkan konsep mengenai ring *clear*, yaitu suatu

ring yang setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antara elemen unit dengan elemen unit reguler ring tersebut. Pada penelitian ini, diselidiki hubungan antara semiring bersih dengan semiring *clear*, yang merupakan perumuman dari ring *clear*.

2. METODE PENELITIAN

Penelitian ini dilakukan melalui kajian pustaka mengenai semiring bersih dan ring *clear* dari berbagai sumber ilmiah. Pada artikel ini, dibahas terlebih dahulu definisi ring dan semiring. Selanjutnya, dibahas mengenai definisi dan sifat elemen idempoten, unit, unit reguler, bersih, dan *clear* pada semiring. Berdasarkan definisi dan sifat-sifat tersebut, dapat didefinisikan semiring bersih dan semiring *clear*, yang kemudian dapat diselidiki hubungan antara keduanya.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1. Ring dan Semiring

Definisi 1 [1]. Misalkan R adalah suatu himpunan tak kosong dan pada R didefinisikan dua operasi biner yang dinotasikan dengan $+$ dan \cdot , yang selanjutnya disebut operasi penjumlahan dan perkalian. Himpunan R disebut ring terhadap operasi penjumlahan $+$ dan perkalian \cdot jika memenuhi:

- (1) $(R, +)$ merupakan grup komutatif;
- (2) operasi \cdot di R bersifat asosiatif, yaitu $(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3)$, untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$;
- (3) operasi penjumlahan dan perkalian di R bersifat:
 - (a) distributif kiri, yaitu $r_1 \cdot (r_2 + r_3) = (r_1 \cdot r_2) + (r_1 \cdot r_3)$, untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$;
 - (b) distributif kanan, yaitu $(r_1 + r_2) \cdot r_3 = (r_1 \cdot r_3) + (r_2 \cdot r_3)$, untuk setiap $r_1, r_2, r_3 \in R$.

Definisi 2 [6]. Himpunan tak kosong S dengan operasi biner $+$ dan \cdot disebut semiring jika memenuhi:

- (1) $(S, +)$ merupakan monoid komutatif.
- (2) (S, \cdot) merupakan semigrup.
- (3) operasi penjumlahan dan perkalian di S bersifat:
 - (a) distributif kiri, yaitu $s_1 \cdot (s_2 + s_3) = (s_1 \cdot s_2) + (s_1 \cdot s_3)$, untuk setiap $s_1, s_2, s_3 \in S$.
 - (b) distributif kanan, yaitu $(s_1 + s_2) \cdot s_3 = (s_1 \cdot s_3) + (s_2 \cdot s_3)$, untuk setiap $s_1, s_2, s_3 \in S$.

Lebih lanjut, semiring $(S, +, \cdot)$ disebut semiring komutatif jika (S, \cdot) merupakan semigrup komutatif, dan disebut semiring dengan elemen satuan jika (S, \cdot) merupakan monoid [6].

3.2. Elemen Idempoten, Unit, dan Unit Reguler pada Semiring

Definisi 3 [2]. Misalkan S suatu semiring. Elemen $e \in S$ dikatakan sebagai elemen idempoten jika $e^2 = e$.

Definisi 4 [2]. Misalkan S suatu semiring dengan elemen satuan 1_S . Elemen $a \in S \setminus \{0\}$ dikatakan sebagai elemen unit jika terdapat elemen $b \in S$ sedemikian sehingga $a \cdot b = b \cdot a = 1_S$.

Definisi 5. Misalkan S suatu semiring dengan elemen satuan. Elemen $a \in S$ dikatakan sebagai elemen unit reguler jika terdapat elemen unit $u \in S$ sedemikian sehingga $a = a \cdot u \cdot a$.

Selanjutnya, himpunan semua elemen idempoten, elemen unit, dan elemen unit reguler dari suatu semiring S berturut-turut dapat ditulis sebagai $Id(S)$, $U(S)$, dan $U_{reg}(S)$.

Lemma 1. Jika S suatu semiring dengan elemen satuan, maka $Id(S) \subseteq U_{reg}(S)$.

Bukti: Diketahui S suatu semiring dengan elemen satuan. Diambil sebarang $e \in Id(S)$, sehingga berlaku $e^2 = e$. Selanjutnya, diperhatikan bahwa $e^2 = e \cdot 1_S \cdot e$, dimana 1_S elemen satuan dari S . Oleh karena $1_S \in U(S)$ dan $e = e \cdot 1_S \cdot e$, maka jelas bahwa $e \in U_{reg}(S)$. Selanjutnya, oleh karena untuk setiap $e \in Id(S)$ berlaku $e \in U_{reg}(S)$, maka terbukti bahwa $Id(S) \subseteq U_{reg}(S)$.

Lemma 2. Jika S suatu semiring dengan elemen satuan, maka $U(S) \subseteq U_{reg}(S)$.

Bukti: Diketahui S suatu semiring dengan elemen satuan. Diambil sebarang $u \in U(S)$, sehingga terdapat $u^{-1} \in S$ sedemikian sehingga $u \cdot u^{-1} = u^{-1} \cdot u = 1_S$, dimana 1_S elemen satuan dari S . Selanjutnya, diperhatikan bahwa $u = u \cdot u^{-1} \cdot u$ dan $u^{-1} \in U(S)$, sehingga jelas bahwa $u \in U_{reg}(S)$. Oleh karena untuk setiap $u \in U(S)$ berlaku $u \in U_{reg}(S)$, maka terbukti bahwa $U(S) \subseteq U_{reg}(S)$.

3.3. Semiring Bersih dan Semiring Clear

Definisi 6 [7]. Suatu elemen dari semiring S dikatakan bersih jika dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antara elemen idempoten dan elemen unit di S .

Definisi 7 [7]. Semiring S dikatakan semiring bersih jika setiap elemen tak nol dari S merupakan elemen bersih.

Definisi 8. Suatu elemen dari semiring S dikatakan *clear* jika dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antara elemen unit dan elemen unit reguler di S .

Definisi 9. Semiring S dikatakan semiring *clear* jika setiap elemen tak nol dari S merupakan elemen *clear*.

Teorema 1. Setiap semiring bersih merupakan semiring *clear*, tetapi tidak setiap semiring *clear* merupakan semiring bersih.

Bukti: Diambil sebarang semiring bersih S . Ini berarti setiap elemen di S merupakan elemen bersih, sehingga dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antar elemen idempoten dan elemen unit di S . Dari Lemma 1., oleh karena setiap elemen idempoten juga merupakan elemen unit reguler, maka jelas bahwa setiap elemen di S juga dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antara elemen unit dan elemen unit reguler di S . Ini berarti setiap elemen di S merupakan elemen *clear*, sehingga S merupakan semiring *clear*. Dengan demikian, terbukti bahwa setiap semiring bersih merupakan semiring *clear*.

Selanjutnya, dipandang semiring $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ dan $\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{Z}^{2 \times 2}$. Jelas bahwa $\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ merupakan elemen *clear* di $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$, sebab $\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 7 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -12 & -5 \end{bmatrix}$, dimana $\begin{bmatrix} 17 & 7 \\ 12 & 5 \end{bmatrix} \in U(\mathbb{Z}^{2 \times 2})$ dan $\begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -12 & -5 \end{bmatrix} \in U_{reg}(\mathbb{Z}^{2 \times 2})$. Andaikan $\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ merupakan elemen bersih di $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$, maka $\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antara elemen idempoten dan elemen unit dari $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$. Diperhatikan bahwa himpunan semua elemen idempoten dari $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ dapat ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} Id(\mathbb{Z}^{2 \times 2}) &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a^2 + bc & ba + bd \\ ca + cd & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \mid \begin{bmatrix} a^2 + bc & b(a + d) \\ c(a + d) & bc + d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}; a, b, c, d \in \mathbb{Z} \right\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mid k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\} \end{aligned}$$

Selanjutnya, dapat diselidiki elemen-elemen unit yang mengakibatkan $\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ merupakan elemen bersih di $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$ sebagai berikut:

Elemen Idempoten	Calon Elemen Unit	Invers Calon Elemen Unit	Keterangan
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	–	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 12 & 12 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	–	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 11 & 11 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$
$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ -k & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -5k-12 & -5k-12 \\ k & 12 \\ 5k-12 & 5k-12 \end{bmatrix}$	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$
$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 & 5 \\ -k & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{k} \\ 1 & 11 \\ 5 & 5k \end{bmatrix}$	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$
$\begin{bmatrix} 0 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 12 & 5-k \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 5-k \\ 12 & 12 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$
$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 & 5-k \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	–	Bukan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$

Dari tabel tersebut, jelas bahwa $\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ tidak dapat dinyatakan sebagai hasil penjumlahan antara elemen idempoten dan elemen unit di $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$. Ini kontradiksi dengan pernyataan sebelumnya, sehingga $\begin{bmatrix} 12 & 5 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ bukan merupakan elemen bersih di $\mathbb{Z}^{2 \times 2}$. Dengan demikian, terbukti bahwa tidak setiap elemen *clear* merupakan elemen bersih. Akibatnya, juga berlaku bahwa tidak setiap semiring *clear* merupakan semiring bersih.

4. KESIMPULAN

Dalam penelitian ini, telah dibahas mengenai definisi semiring bersih dan semiring *clear*, termasuk definisi elemen idempoten, unit, dan unit reguler dalam konteks semiring. Berdasarkan analisis terhadap definisi semiring bersih dan semiring *clear*, serta sifat-sifat elemen idempoten, unit, dan unit reguler pada semiring, diperoleh bahwa setiap semiring bersih merupakan semiring *clear*. Hal ini disebabkan karena setiap elemen idempoten pada semiring juga merupakan elemen unit reguler, sehingga setiap elemen bersih pada semiring juga merupakan elemen *clear*. Namun demikian, dari penelitian ini juga diperoleh bahwa tidak setiap semiring *clear* merupakan semiring bersih.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Dr. Nikken Prima Puspita, M.Sc. selaku dosen pembimbing yang telah memberikan arahan, bimbingan, dan dukungan yang sangat berarti kepada penulis. Atas kesabaran dan dedikasi beliau, penelitian ini dapat diselesaikan dengan baik. Penulis juga mengucapkan terima kasih kepada keluarga yang selalu memberikan doa, dukungan, dan semangat kepada penulis, yang selalu menjadi motivasi besar bagi penulis. Tidak lupa penulis mengucapkan terima kasih kepada rekan-rekan dan semua pihak yang turut membantu penulis secara langsung maupun tidak langsung. Semoga segala kebaikan dan dukungan yang telah diberikan senantiasa mendapatkan balasan yang sebaik-baiknya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] S. Wahyuni, I. E. Wijayanti, D. A. Yuwaningsih, dan A. D. Hartanto, *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta: Gadjah Mada University Press, 2021.
- [2] D. Das dan S. Kar, “Strongly Clean Semiring,” *Proceedings of the National Academy of Sciences India Section A - Physical Sciences*, vol. 94, no. 2, hlm. 249–258, Apr 2024, doi: 10.1007/s40010-024-00875-x.
- [3] M. C. Arifin dan I. Ernanto, “IDEMPOTENT ELEMENTS IN MATRIX RING OF ORDER 2 OVER POLYNOMIAL RING $\mathbb{Z}_{p^2q}[x]$,” *Journal of Fundamental Mathematics and Applications (JFMA)*, vol. 6, no. 2, hlm. 136–147, Nov 2023, doi: 10.14710/jfma.v6i2.19307.
- [4] O. : Rippi, M. Program, S. M. Pendidikan, M. Sekolah, T. Keguruan, dan I. Pendidikan, “STRUKTUR ALJABAR: RING BAHAN AJAR,” 2016.
- [5] B. V. Zabavsky, O. V. Domsha, dan O. M. Romaniv, “Clear Rings and Clear Elements,” *Matematychni Studii*, vol. 55, no. 1, hlm. 3–9, Mar 2021.
- [6] A. Rahmawati, “SIFAT-SIFAT SEMIRING DAN KONSTRUKSINYA.”
- [7] S. Kar dan D. Das, “Clean semiring,” *Beitrage zur Algebra und Geometrie*, vol. 64, no. 1, hlm. 197–207, Mar 2023, doi: 10.1007/s13366-022-00628-0.

Variasi Pohon Fraktal Tiga Cabang Menggunakan L-Systems

Kosala Dwidja Purnomo S.Si., M.Si¹, Miskatul Anwar, S.Si.², Bagus Juliyanto, S.Si., M.Si³,

Dr. Firdaus Ubaidillah, S.Si., M.Si.⁴

^{1,2,3,4}Jurusan Matematika, Universitas Jember

kosala.fmipa@unej.ac.id

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima : 13 November 2024

Direvisi : 22 Januari 2025

Diterbitkan : 10 Februari 2025

Kata Kunci:

Fraktal

Pohon fraktal

L-Systems

Parametric L-Systems

Deterministic L-Systems

Stochastic L-Systems

ABSTRAK

Penelitian ini bertujuan untuk membangkitkan pohon fraktal tiga cabang menggunakan L-Systems dengan variasi berupa parameter ketebalan, panjang, dan sudut percabangan pohon. Pohon fraktal adalah pengembangan bentuk fraktal pohon Pythagoras yang memiliki dua cabang. Dengan variasi parameter ini diharapkan dapat dihasilkan pohon fraktal yang lebih beragam. L-Systems yang digunakan terdiri atas dua jenis, yaitu deterministik dan stokastik. Pohon fraktal yang dibentuk mengikuti aturan produksi dan parameter yang ditentukan. Parameter yang diinputkan harus diperkirakan dan dihitung agar sesuai dengan kondisi riil. Simulasi menunjukkan bahwa, dengan variasi parameter tersebut, pohon fraktal tiga cabang menggunakan L-Systems dapat dikembangkan menggunakan *parametric* L-Systems dengan hasil yang lebih bervariasi.

Copyright © 20XX SIMANIS.

All rights reserved.

Korespondensi:

Kosala Dwidja Purnomo,

Jurusan Matematika,

FMIPA Universitas Jember,

Jl. Kalimantan 37 Jember 68121

kosala.fmipa@unej.ac.id

1. PENDAHULUAN

Fraktal berasal dari gabungan kata "fractus" yang mengindikasikan ketidakteraturan dan "frangere" yang merujuk pada perpecahan atau pembagian menjadi kepingan-kepingan [1]. Benoit B. Mandelbrot adalah tokoh yang pertama kali memperkenalkan gagasan tentang fraktal. Fraktal memiliki ciri *self-similarity* atau kemiripan diri yang diperoleh melalui proses iteratif. Iterasi adalah repetisi pola tertentu yang membentuk objek fraktal [2]. Beberapa contoh objek fraktal yang terbentuk melalui iterasi mencakup pohon Pythagoras, segitiga Sierpinski, Koch Snowflake, Peano Curve, Mandelbrot Set, dan Lorentz Attractor [3]. Secara umum fraktal digolongkan menjadi dua tipe, yaitu linier dan nonlinier. Contoh fraktal tipe linier yaitu pohon Pythagoras, Segitiga Sierpinski, atau kurva Koch Snowflake yang dibentuk menggunakan algoritma yang sesuai dengan geometri Euclid. Di sisi lain, fraktal tipe nonlinier seperti himpunan Mandelbrot dan himpunan Julia yang terbentuk melalui penggunaan fungsi dinamik nonlinier [4].

Fraktal mengalami perkembangan seiring dengan kemajuan teknologi. Objek-objek alam seperti pohon, gunung, batu, awan, dan lainnya dapat direpresentasikan dalam bentuk gambar tiruan menggunakan prinsip-prinsip fraktal [4]. Salah-satu contoh gambar fraktal tiruan yang menggambarkan pohon sebenarnya adalah pohon fraktal. Pohon fraktal hakikatnya adalah pengembangan dari pohon Pythagoras yang memiliki dua cabang. Pohon fraktal terbentuk dari batang utama dan beberapa cabang yang masing-masing meniru bentuk pohon secara keseluruhan. Secara sederhana, proses ini dimulai dengan tunas yang muncul dari tanah kemudian tumbuh cabang. Dari setiap cabang, tumbuh cabang yang lebih kecil dan proses ini berlanjut sesuai dengan iterasi yang dilakukan [5]. Proses pembuatan pohon fraktal tiga cabang melalui tiga tahapan yaitu

membangkitkan bentuk awal berupa persegi, menentukan bentuk dasar percabangan, dan terakhir membentuk pohon fraktal dengan IFS (*Iterated Function Systems*) [6].

Pohon fraktal dapat dibangkitkan dengan beberapa cara. Diantaranya adalah dengan menggunakan L-Systems dan transformasi Affine. L-Systems merupakan konsep penulisan ulang dari *string* yang kemudian diinterpretasikan menjadi objek. Konsep ini pertama kali diperkenalkan oleh seorang ilmuwan biologi bernama Lindenmayer pada tahun 1968. Lindenmayer menggunakan L-Systems untuk memodelkan proses pertumbuhan tanaman alga yang kemudian konsep ini dikembangkan oleh A.R. Smith untuk menciptakan gambar realistis dan fraktal [7]. L-Systems memiliki tiga komponen utama yaitu variabel (V), aksioma (ω), dan produksi (p) [8]. Penulisan ulang dalam L-Systems merujuk pada *self-similarity* yang memungkinkan pembentukan fraktal dengan mudah [9]. L-Systems dibagi menjadi dua berdasarkan aturan produksinya yaitu *deterministic* L-Systems dan *stochastic* L-Systems. *Deterministic* L-Systems atau DOL-Systems adalah L-Systems yang setiap simbolnya hanya memiliki satu produksi, sedangkan *stochastic* L-Systems yang setiap simbolnya memiliki beberapa aturan produksi dengan penggunaannya tergantung dari probabilitas aturannya [10]. Dalam hal ini pembentukan pohon fraktal menggunakan parametrik L-Systems. *Parametric* L-Systems adalah bagian dari L-Systems di mana setiap simbol memiliki nilai numerik yang disebut parameter. *Parametric* L-Systems terdiri dari beberapa jenis seperti *parametric deterministic* L-Systems dan *parametric stochastic* L-Systems [11].

Penafsiran grafis pada L-Systems merupakan pembuatan representasi visual dari barisan generasi berdasarkan aksioma dan aturan produksi yang telah ditentukan. Simbol-simbol yang dapat ditafsirkan secara grafis pada L-Systems apabila satuan panjang p dan putaran θ sebagai berikut [12]:

- F : menggambar ke depan sepanjang p
- G : bergerak ke depan p tanpa menggambar
- + : berputar berlawanan arah jarum jam dengan sudut θ
- : berputar searah jarum jam dengan sudut θ

Transformasi Affine adalah suatu teknik yang digunakan untuk menghitung posisi baru dari suatu objek dengan menggunakan matriks [13]. Transformasi ini bersifat linier dan mencakup operasi seperti dilatasi, rotasi, dan translasi [14]. Metode dilatasi adalah suatu teknik yang digunakan untuk memperbesar atau memperkecil gambar atau bentuk geometris pada bidang [15]. Rotasi adalah suatu bentuk transformasi geometrik yang dilakukan dengan memutar objek sesuai dengan sudut yang telah ditetapkan. Translasi adalah transformasi dengan bentuk tetap, memindahkan objek apa adanya. Setiap titik objek yang di translasi dengan besaran yang sama [14].

2. METODE PENELITIAN

Pada metode penelitian ini dibahas langkah-langkah penelitian yang harus dilakukan agar membentuk pohon fraktal tiga cabang dengan metode L-Systems. Pembangkitan pohon fraktal diawali dengan menentukan tiga komponen L-Systems yaitu simbol (V), aksioma (ω), aturan produksi (p), dan probabilitas (P) untuk *stochastic* L-Systems. Langkah-langkah pembentukan pohon fraktal tiga cabang adalah:

- a. menentukan segmen garis awal atau tunas;
- b. menduplikasi segmen garis;
- c. mendilatasi tiga segmen garis sebagai cabang;
- d. merotasi segmen garis dan menggeser segmen garis.

Variasi yang akan digunakan untuk pembentukan pohon fraktal tiga cabang yaitu ketebalan, panjang, rasio, dan sudut percabangan. Menurut Leonardo Da Vinci, setiap ketebalan cabang pohon (L) jika ditambahkan akan sama dengan batang yang di bawahnya (yaitu L_1, L_2, L_3). Dari penjelasan di atas didapatkan Persamaan (1) sampai (4) seperti di bawah. Dalam hal ini d dan r (beserta indeksnya) masing-masing menyatakan diameter atau jari-jari batang.

$$L = L_1 + L_2 + L_3 \quad (1)$$

$$\frac{1}{4}\pi d^2 = \frac{1}{4}\pi d_1^2 + \frac{1}{4}\pi d_2^2 + \frac{1}{4}\pi d_3^2 \quad (2)$$

$$d^2 = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 \quad (3)$$

Dari Persamaan (3) dapat dicari nilai rasio ketebalan (r) dari ketiga cabang dengan menentukan rasio ketebalan cabang satu dan dua terlebih dahulu dengan interval antara $0 < r < 1$. Dari penjelasan di atas didapatkan Persamaan (4) sampai (13) seperti di bawah ini.

Dalam hal ini didefinisikan

$$d_1 = r_1 \times d \text{ dan } d_2 = r_2 \times d \quad (4)$$

sehingga dapat diperoleh

$$d^2 = (r_1 \times d)^2 + (r_2 \times d)^2 + d_3^2 \quad (5)$$

$$d^2 = r_1^2 \times d^2 + r_2^2 \times d^2 + d_3^2 \quad (6)$$

$$d_3^2 = d^2 - d^2 \times (r_1^2 + r_2^2) \quad (7)$$

$$d_3^2 = d^2 \times (1 - r_1^2 - r_2^2) \quad (8)$$

$$d_3 = \sqrt{d^2 \times (1 - r_1^2 - r_2^2)} \quad (9)$$

$$d_3 = d \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2} \quad (10)$$

Kemudian akan dicari nilai r_3

$$d_3 = r_3 \times d \quad (11)$$

$$r_3 = \frac{d \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2}}{d} \quad (12)$$

$$r_3 = \sqrt{1 - r_1^2 - r_2^2} \quad (13)$$

Penginputan panjang cabang l akan dipengaruhi ketebalan cabang, jadi semakin tebal cabangnya, maka akan semakin panjang cabangnya.

$$l_1 = \frac{l}{R_1}, l_2 = \frac{l}{R_2}, l_3 = \frac{l}{R_3} \quad (14)$$

Untuk nilai R_1, R_2 , dan R_3 didapatkan dari faktor skala 2 yang dikurangi rasio ketebalan cabang yang mengakibatkan penginputan interval rasio panjang antara satu sampai dengan dua ($1 < R < 2$).

$$R_1 = 2 - r_1, R_2 = 2 - r_2, R_3 = 2 - r_3 \quad (15)$$

Setiap cabang memiliki arah rotasi yang berbeda-beda. Besaran sudut cabang α, β dan γ dipengaruhi oleh ketebalan cabang dan nilai θ yang sudah ditetapkan sebelumnya. Semakin besar ketebalan cabang maka semakin kecil sudut cabang.

$$\alpha = (1 - r_1)\theta, \beta = (1 - r_2)\theta, \gamma = (1 - r_3)\theta \quad (16)$$

Visualisasi pohon fraktal tiga cabang menggunakan L-Systems dengan mengubah ketebalan, panjang, dan sudut cabang akan disimulasikan menggunakan program MATLAB. Hasil visualisasi dari simulasi program pohon fraktal akan dianalisis dan dibandingkan antara pohon fraktal yang menggunakan *deterministic* L-Systems dan *stochastic* L-Systems.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini dijelaskan perumusan pohon fraktal tiga cabang dengan menggunakan parametric L-systems, lalu dilanjutkan dengan bagaimana pembangkitan pohon fraktalnya dengan pendekatan deterministik dan stokastiknya. Dalam hal ini juga akan dibahas variasi dari parameter ketebalan, panjang, dan sudut percabangan.

3.1. Perumusan Pohon Fraktal Tiga Cabang Menggunakan *Parametric* L-Systems

Pembangkitan pohon fraktal tiga cabang menggunakan L-Systems dimulai dengan menetapkan huruf dan simbol yang akan digunakan dalam aturan produksi. Tiga huruf yang digunakan dalam penelitian ini adalah F, G , dan f , dan setiap huruf tersebut memiliki makna yang serupa yaitu menggambarkan maju dari sebuah segmen garis. Aksioma yang digunakan untuk memvisualisasikan tunas awal ditentukan sebagai huruf f , sebagaimana telah ditetapkan pada tahap sebelumnya. Aturan produksi dibuat bersamaan dengan penentuan ketebalan, panjang, dan sudut percabangan. Setelah mendapatkan aturan produksi, langkah terakhir adalah menentukan faktor probabilitas untuk menerapkan sifat stokastik pada L-Systems. Berikut komponen-komponen L-Systems yang akan digunakan:

$$\left. \begin{aligned}
 V &= \{f, F, G, -, +, !, \&, ?\} \\
 \omega &= f \\
 p_1: f &\rightarrow (!)[+F][\pm G][-f] \\
 p_2: G &\rightarrow (?)[+F][\pm G][-f] \\
 p_3: F &\rightarrow (\&)[+F][\pm G][-f]
 \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

Peraturan produksi tersebut menjelaskan struktur percabangan, panjang, dan ketebalan cabang. Oleh karena itu, penerapan aturan produksi tersebut akan mengakibatkan penyingkatan dan penyusutan pada ketebalan dan panjang batang tanaman.

Parametric L-Systems merupakan bagian dari *L-Systems* yang membentuk lebih banyak variasi pohon fraktal dengan cara memasukkan ketebalan, panjang, sudut percabangan dan faktor probabilitas untuk *stochastic L-Systems*. Berikut variabel-variabel yang akan digunakan dalam *parametric L-Systems*:

- $F(l, d)$: Menggambar cabang pertama dengan panjang (l) dan ketebalan (d)
- $G(l, d)$: Menggambar cabang kedua dengan panjang (l) dan ketebalan (d)
- $f(l, d)$: Menggambar cabang ketiga dengan panjang (l) dan ketebalan (d)
- $+(\alpha)$: Berputar ke kiri sebesar α derajat untuk cabang pertama
- $\pm(\beta)$: Berputar ke kiri atau ke kanan sebesar β derajat untuk cabang kedua
- $-(\gamma)$: Berputar ke kanan sebesar γ derajat untuk cabang ketiga
- $\&$: Mengganti fungsi F pada generasi sebelumnya
- $?$: Mengganti fungsi G pada generasi sebelumnya
- $!$: Mengganti fungsi f pada generasi sebelumnya
- r_1 : Rasio ketebalan cabang pertama
- r_2 : Rasio ketebalan cabang kedua
- r_3 : Rasio ketebalan cabang ketiga
- R_1 : Rasio panjang cabang pertama
- R_2 : Rasio panjang cabang kedua
- R_3 : Rasio panjang cabang ketiga
- P : Probabilitas digunakan aturan produksi

Berdasarkan Persamaan (1) sampai (16) didapatkan implementasi ketebalan cabang, panjang cabang, rasio, dan sudut percabangan pada aturan produksi dalam Persamaan (17).

$$\omega = f(l, d)$$

$$p_1: f(l, d) \rightarrow !(l, d) \left[+((1 - r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[\pm((1 - r_2)\theta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[-((1 - r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] : P_1$$

$$p_2: G(l, d) \rightarrow ?(l, d) \left[+((1 - r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[\pm((1 - r_2)\theta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[-((1 - r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] : P_2$$

$$p_3: F(l, d) \rightarrow \&(l, d) \left[+((1 - r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[+((1 - r_2)\theta)G\left(\frac{l}{R_2}, * r_2\right) \right] \left[-((1 - r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] : P_3$$

Diawali dengan terciptanya tunas dengan panjang sebesar l dan ketebalan sebesar d . Kemudian akan muncul tiga cabang lagi yaitu f , G dan F yang lebih tipis dan pendek dari cabang sebelumnya. Nilai R_1 , R_2 , dan R_3 mempengaruhi panjang setiap cabang. Ketebalan cabang akan dipengaruhi r_1 , r_2 , dan r_3 . Nilai P_1 , P_2 , dan P_3 mempengaruhi probabilitas munculnya aturan produksi pada *stochastic L-Systems*.

3.2. Pembangkitan Pohon Fraktal Tiga Cabang Menggunakan *Deterministic L-Systems*

Pada variasi ini akan dibagi menjadi tiga yaitu variasi pohon fraktal dengan mengubah ketebalan dan panjang cabang melalui rasio, variasi pohon fraktal dengan mengubah sudut percabangan dan variasi pohon fraktal dengan mengubah ketebalan, panjang dan sudut percabangan. Pembentukannya akan menggunakan tiga aturan produksi yaitu:

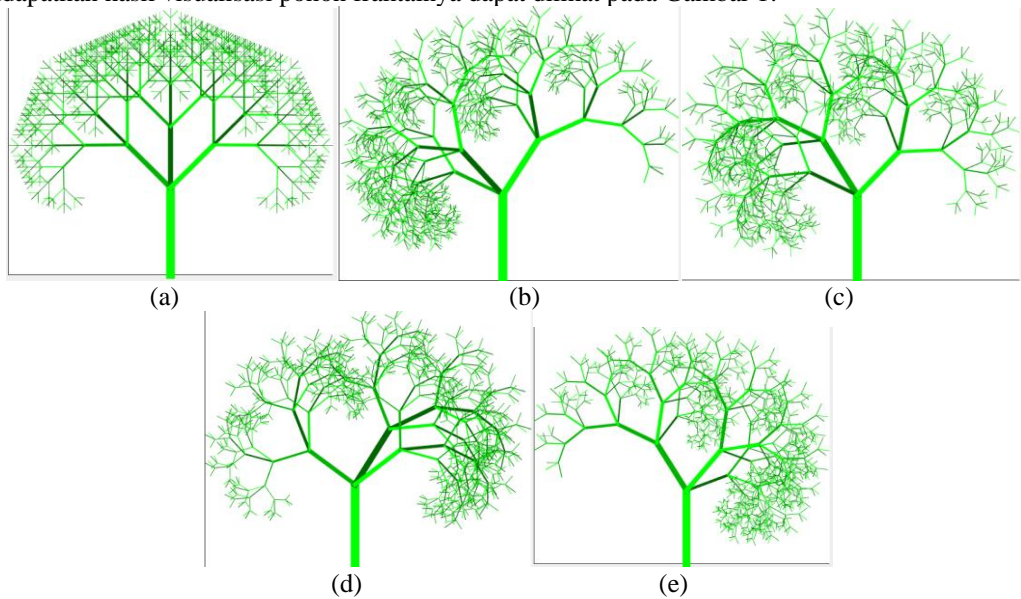
$$\begin{aligned}
 \text{Rule } A = \quad p_1: f &\rightarrow ![+F][G][-f] \\
 p_2: G &\rightarrow ?[+F][G][-f] \\
 p_3: F &\rightarrow \&[+F][G][-f]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1: f &\rightarrow ![+F][+G][-f] \\ \text{Rule B} = p_2: G &\rightarrow ?[+F][+G][-f] \\ p_3: F &\rightarrow \&[+F][+G][-f] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_1: f &\rightarrow ![+F][-G][-f] \\ \text{Rule C} = p_2: G &\rightarrow ?[+F][-G][-f] \\ p_3: F &\rightarrow \&[+F][-G][-f] \end{aligned}$$

a. Variasi Pohon Fraktal Tiga Cabang dengan Mengubah Rasio Ketebalan dan Panjang Cabang

Pada variasi ini akan diubah ketebalan cabang dan panjang cabang melalui rasio. Pohon fraktal yang akan dibentuk berjumlah lima pohon dengan rasio yang berbeda-beda. Untuk ketebalan awal dan panjang awal, serta sudutnya yaitu $d = 10$, $l = 10$, $\theta = 107^\circ$ dan iterasi dilakukan tujuh kali. Jika iterasi dilakukan lebih dari tujuh kali maka pohon fraktal yang terbentuk akan terlihat menumpuk pada bagian cabangnya. Dari input di atas didapatkan hasil visualisasi pohon fraktalnya dapat dilihat pada Gambar 1.



(a) $r_1 = 0,5774$, $r_2 = 0,5774$, dan $r_3 = 0,5774$, (b) $r_1 = 0,4$, $r_2 = 0,6$ dan $r_3 = 0,6928$,
 (c) $r_1 = 0,7$, $r_2 = 0,4$ dan $r_3 = 0,5099$, (d) $r_1 = 0,5$, $r_2 = 0,7$ dan $r_3 = 0,5099$,
 (e) $r_1 = 0,7$, $r_2 = 0,35$ dan $r_3 = 0,6225$

Gambar 1. Pohon Fraktal dengan Variasi Ketebalan dan Panjang Cabang

Pada Gambar 1 dapat dilihat bahwa visualisasi pohon fraktal tiga cabang memiliki beberapa perbedaan. Salah satunya dapat dilihat pada Gambar 1(a) pohon fraktalnya terlihat simetris. Hal ini dikarenakan rasio 1, rasio 2, dan rasio 3 nilainya sama, sehingga ketebalan dan panjang cabangnya akan sama. Untuk cabang tengah penempatannya vertikal keatas, karena tidak adanya sudut yang diinputkan sesuai dengan Rule A. Pada Gambar 1(b) pohon fraktalnya terlihat lebih condong ke kanan, sedangkan Gambar 1(c) lebih condong ke kiri mengikuti rasio paling besar. Pada Gambar 1(b) ketebalan dan panjang yang paling besar terdapat di cabang tiga, karena nilai rasionya yang paling besar, sedangkan pada Gambar 1(c) ketebalan dan panjang yang paling besar terdapat di cabang pertama. Untuk ketebalan dan panjang terkecil terdapat pada cabang pertama untuk Gambar 1(b) dan cabang kedua untuk Gambar 1(c). Pada Gambar 1(c) cabang pertama terletak diantara cabang kedua dan ketiga dikarenakan nilai rasio dari cabang pertama lebih besar dari cabang kedua dan ketiga.

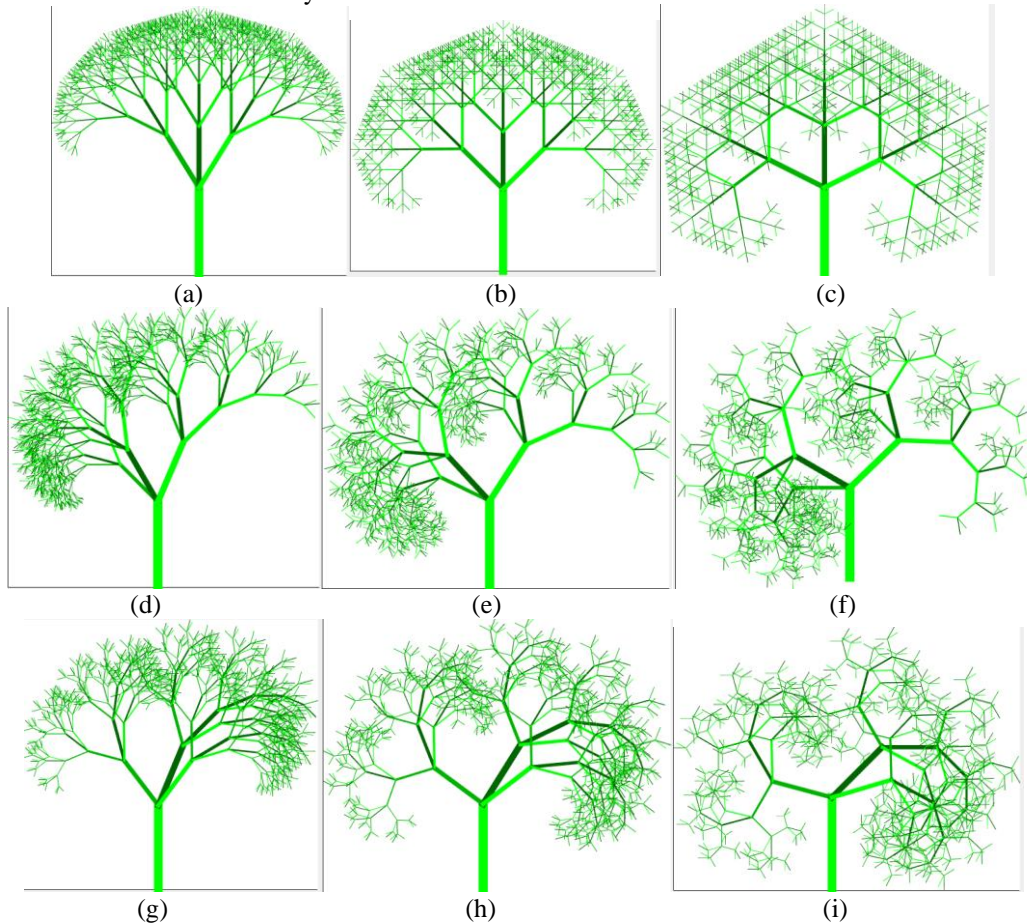
Untuk Gambar 1(d) dan Gambar 1(e) menggunakan Rule C sehingga cabang tengahnya rotasi ke arah kanan. Untuk Gambar 1(d) rasio yang paling besar terdapat pada cabang kedua yang rotasinya ke arah kanan sehingga pohon fraktal terlihat condong ke arah kanan, sedangkan untuk Gambar 1(e) rasio yang paling besar terdapat pada cabang pertama yang rotasinya ke arah kiri sehingga pohon fraktal lebih condong ke kiri. Untuk ketebalan dan panjang paling besar terdapat pada cabang kedua dan yang terkecil pada cabang pertama untuk Gambar 1(d), sedangkan pada Gambar 1(e) yang terbesar terdapat pada cabang pertama dan yang terkecil pada cabang kedua.

Dari kelima gambar tersebut dapat disimpulkan bahwa nilai dari rasio, ketebalan, dan panjang berbanding lurus. Jadi, semakin besar rasionya maka akan semakin tebal dan panjang cabangnya. Rasio terbesar pada cabang mengakibatkan pohon lebih condong ke arah cabang yang memiliki rasio terbesar. Semakin kecil sudut belok pada cabang maka ketebalan dan panjang cabang akan semakin besar.

b. Variasi Pohon Fraktal Tiga Cabang dengan Mengubah Sudut Percabangan

Pada simulasi ini akan memvisualisasikan sembilan pohon fraktal dengan *Rule* dan sudut berbeda-beda. Input sudutnya akan menggunakan tiga variasi yaitu $\theta = 75^\circ$, $\theta = 107^\circ$, dan $\theta = 135^\circ$ dengan $d = 10$ dan $l = 10$. Berikut hasil visualisasi pohon fraktal dengan variasi sudut percabangan dapat dilihat pada Gambar 2.

Pada Gambar 2 dapat dilihat semakin besar sudut (θ) maka akan semakin jauh jarak antar cabangnya. Hal ini mengakibatkan pohon terlihat berimpit jika sudut (θ) kecil dan akan terlihat renggang jika sudut (θ) besar. Pada Gambar 2(a) sampai 2(c) visualisasinya masih simetris dan semakin besar sudut (θ) maka semakin lebar juga pohonnya. Untuk Gambar 2(d) sampai 2(i) pohon fraktalnya lebih condong ke kanan mengikuti rasio terbesar dan semakin besar sudutnya akan terlihat semakin lebar.

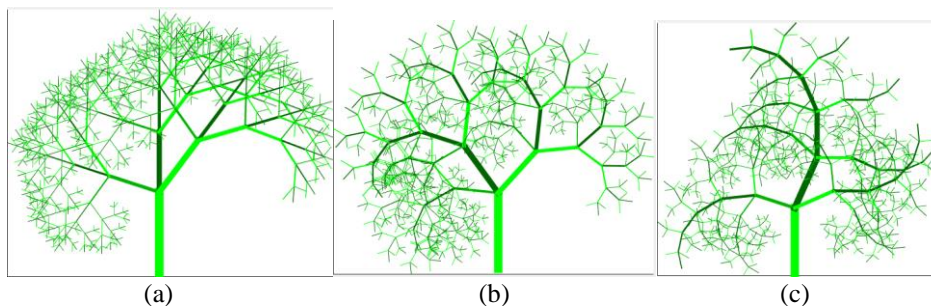


(a) $\theta = 75^\circ$ dengan *Rule A*, (b) $\theta = 107^\circ$ dengan *Rule A*, (c) $\theta = 150^\circ$ dengan *Rule A*,
 (d) $\theta = 75^\circ$ dengan *Rule B*, (e) $\theta = 107^\circ$ dengan *Rule B*, (f) $\theta = 150^\circ$ dengan *Rule B*,
 (g) $\theta = 75^\circ$ dengan *Rule C*, (h) $\theta = 107^\circ$ dengan *Rule C*, dan (i) $\theta = 150^\circ$ dengan *Rule C*.

Gambar 2. Pohon Fraktal Tiga Cabang dengan Variasi Sudut Percabangan

c. Variasi Pohon Fraktal Tiga Cabang dengan Mengubah Ketebalan, Panjang, dan Sudut Percabangan

Variasi ini akan mengubah seluruh parameter dari ketebalan, panjang dan sudut percabangan. Pada variasi ini pohon fraktal yang dibentuk sebanyak tiga buah. Berikut merupakan hasil visualisasi pohon fraktal dari input dan aturan produksi diatas dapat dilihat pada Gambar 3.



(a) $r_1 = 0,4$, $r_2 = 0,6$, $r_3 = 0,6928$, dan $\theta = 120^\circ$ dengan *Rule A*,

(b) $r_1 = 0,3$, $r_2 = 0,7$, $r_3 = 0,6481$, dan $\theta = 120^\circ$ dengan *Rule B*,

(c) $r_1 = 0,4$, $r_2 = 0,8$, $r_3 = 0,4472$, dan $\theta = 120^\circ$ dengan *Rule C*

Gambar 3. Pohon Fraktal dengan Variasi Ketebalan, Panjang, dan Sudut Percabangan

Dari Gambar 3 dapat dilihat bahwa pohon fraktal yang dihasilkan pada Gambar 3(a) tidak simetris dan lebih condong ke kiri. Pohon fraktal pada Gambar 3(b) lebih terlihat rimbun dan lebih condong ke kiri. Pohon fraktal pada Gambar 3(c) bentuknya menyerupai pohon cemara, tetapi cabangnya lebih melengkung ke kiri.

3.3. Pembangkitan Pohon Fraktal Tiga Cabang Menggunakan *Stochastic L-Systems*

Pada bagian ini akan dibentuk pohon fraktal tiga cabang menggunakan *stochastic L-Systems*. Setiap aturan produksi akan memiliki probabilitas masing-masing. Pada bagian ini pohon fraktal menggunakan *stochastic L-Systems* akan dibagi dua variasi yaitu berdasarkan sudut belok cabang tengah dan sudut belok seluruh cabang.

a. Variasi Pohon Fraktal Berdasarkan Sudut Belok Cabang Tengah

Variasi ini akan menggunakan cabang tengah sebagai cabang utama yang akan membentuk variasi pohon fraktal. Variasi ini memiliki akan sembilan aturan produksi dengan sudut belok cabang tengah ke kiri dan kanan atau tidak belok. Komponen yang akan digunakan yaitu $r_1 = 0,5$, $r_2 = 0,7$, $r_3 = 0,5099$, $d = 10$, $l = 10$ dan $\theta = 107^\circ$. Berikut merupakan sembilan aturan produksi yang akan digunakan.

$$p_1: f(l, d) \rightarrow !(l, d) \left[+((1 - r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[-((1 - r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] : 0.4$$

$$p_2: f(l, d) \rightarrow !(l, d) \left[+((1 - r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[+((1 - r_2)\theta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[-((1 - r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] : 0.3$$

$$p_3: f(l, d) \rightarrow !(l, d) \left[+((1 - r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[-((1 - r_2)\theta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[-((1 - r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] : 0.3$$

$$p_4: G(l, d) \rightarrow ?(l, d) \left[+((1 - r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[-((1 - r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] : 0.4$$

$$p_5: G(l, d) \rightarrow ?(l, d) \left[+((1 - r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[+((1 - r_2)\theta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[-((1 - r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] : 0.3$$

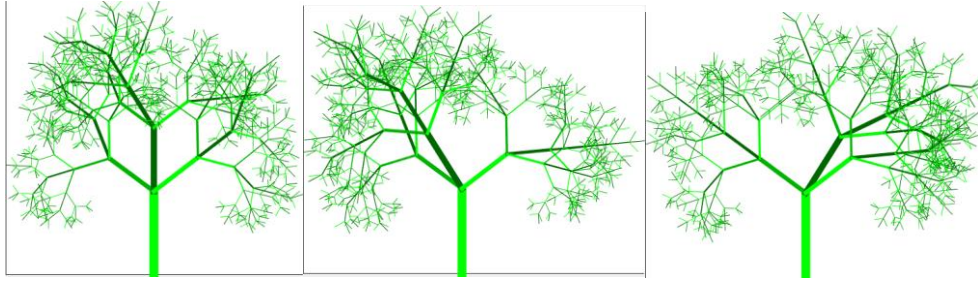
$$p_6: G(l, d) \rightarrow ?(l, d) \left[+((1 - r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[-((1 - r_2)\theta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[-((1 - r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] : 0.3$$

$$p_7: F(l, d) \rightarrow \&(l, d) \left[+((1 - r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[-((1 - r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] : 0.4$$

$$p_8: F(l, d) \rightarrow \&(l, d) \left[+((1 - r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[+((1 - r_2)\theta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[-((1 - r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] : 0.3$$

$$p_9: F(l, d) \rightarrow \&(l, d) \left[+((1 - r_1)\theta)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[-((1 - r_2)\theta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[-((1 - r_3)\theta)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] : 0.3$$

Dari kesembilan aturan produksi di atas didapatkan hasil visualisasi pohon fraktal seperti pada Gambar 4.



Gambar 4. Pohon Fraktal *Stochastic L-Systems* Berdasarkan Sudut Belok Cabang Tengah

Dari Gambar 4 dapat dilihat bahwa cabang tengah cenderung tumbuh dengan garis lurus atau tanpa sudut. Hal ini terjadi karena aturan produksi untuk cabang tengahnya yang tanpa sudut memiliki probabilitas yang lebih besar dari aturan produksi yang lain.

b. Variasi Pohon Fraktal Berdasarkan Sudut Belok Semua Cabang beserta Ketebalan dan Panjangnya

Variasi ini memiliki sembilan aturan produksi dengan perubahan sudut belok seluruh cabang. Aturan produksinya menggunakan sudut belok cabang tengah ke kiri atau *Rule B*. Komponen yang akan digunakan adalah $r_1 = 0,5$, $r_2 = 0,8$, $r_3 = 0,3317$, $d = 10$, $l = 10$, dan $\theta = 107^\circ$. Berikut ini merupakan sembilan aturan produksi yang akan digunakan.

$$p_1: f(l, d) \rightarrow ! (l, d) \left[+(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[+(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[-(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] : 0.4$$

$$p_2: f(l, d) \rightarrow ! (l, d) \left[+(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] \left[+(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[-(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] : 0.3$$

$$p_3: f(l, d) \rightarrow ! (l, d) \left[+(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[+(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] \left[-(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] : 0.3$$

$$p_4: G(l, d) \rightarrow ? (l, d) \left[+(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[+(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[-(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] : 0.4$$

$$p_5: G(l, d) \rightarrow ? (l, d) \left[+(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] \left[+(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[-(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] : 0.3$$

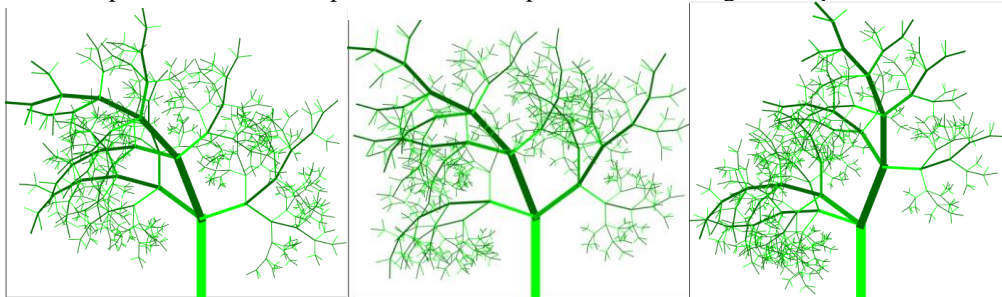
$$p_6: G(l, d) \rightarrow ? (l, d) \left[+(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[+(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] \left[-(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] : 0.3$$

$$p_7: F(l, d) \rightarrow \& (l, d) \left[+(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[+(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[-(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] : 0.4$$

$$p_8: F(l, d) \rightarrow \& (l, d) \left[+(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] \left[+(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] \left[-(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] : 0.3$$

$$p_9: F(l, d) \rightarrow \& (l, d) \left[+(\beta)G\left(\frac{l}{R_2}, d * r_2\right) \right] \left[+(\gamma)f\left(\frac{l}{R_3}, d * r_3\right) \right] \left[-(\alpha)F\left(\frac{l}{R_1}, d * r_1\right) \right] : 0.3$$

Dari Sembilan aturan produksi di atas didapatkan visualisasi pohon fraktal sebagaimana pada Gambar 5.



Gambar 5. Pohon Fraktal *Stochastic L-Systems* dengan Variasi Sudut Belok Seluruh Cabang

Dari Gambar 5 terlihat bahwa ketiga pohon fraktalnya lebih condong ke arah kanan karena sudut belok cabang tengah ke arah kanan yang memiliki rasio terbesar. Ketiga pohon tersebut kadang memiliki cabang yang terlihat berliku-liku dikarenakan perubahan sudut belok pada setiap cabang.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan di atas dapat disimpulkan bahwa pohon fraktal tiga cabang dapat dimodelkan dengan menggunakan *parametric L-Systems*. Parameter yang divariasikan dalam penelitian ini adalah ketebalan, panjang, dan sudut percabangan. Dalam hal ini kedua bentuk *L-Systems* yang deterministik dan stokastik dapat menghasilkan pohon fraktal tiga cabang. Untuk pengembangan lebih lanjut, dapat

dirumuskan bagaimana modelisasinya untuk kasus tiga dimensi sehingga dapat lebih mendekati model pohon sebenarnya.

5. UCAPAN TERIMA KASIH

Terima kasih disampaikan kepada Kelompok Riset Computer Aided Geometric Design, Fractals, and Mathematical Analysis (GFracMA) di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember atas dukungannya dalam pendanaan dan masukannya.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*. New York: W.H. Freeman and Company, 1983.
- [2] K. D. Purnomo, "Pembangkitan Segitiga Sierpinski Dengan Transformasi Affine Berbasis Beberapa Benda Geometris", *Prosiding Seminar Nasional Matematika*, Universitas Jember, 2014, pp. 365–375.
- [3] Y. Romadiastri, "Batik Fraktal: Perkembangan Aplikasi Geometri", *δELTA*, vol. 1, no. 2, pp. 158–164, 2013.
- [4] L. D. F. Anggraini, "Geometri Fraktal Dan Transformasi Geometri Sebagai Dasar Pengembangan Motif Batik Sekar Jagad", *Transformasi: Jurnal Pendidikan Matematika dan Matematika*, vol. 3, no. 1, pp. 1–14, 2019.
- [5] P. G. Ramadhan, K. D. Purnomo, and F. Ubaidillah, "Variasi Pohon Fraktal Menggunakan L-Systems", *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, vol. 21, no. 2, p. 77, 2021, doi: 10.19184/mims.v21i2.25697.
- [6] K. D. Purnomo, D. Wahyuningtyas, and F. Ubaidillah, "Pembangkitan Pohon Fraktal Tiga Cabang dengan Metode Iterated Function System", *Jurnal ILMU DASAR*, vol. 23, no. 1, p. 9, 2022, doi: 10.19184/jid.v23i1.17447.
- [7] S. Marlina, Q. Aini, and I. W. Sudiarta, "Pengembangan Motif Batik Sasambo dengan Sistem Lindenmayer", *Eigen Mathematics Journal*, vol. 3, no. 2, pp. 118–124, 2020, doi: 10.29303/emj.v3i2.77.
- [8] Juhari, "Stochastic L-Systems", *CAUCHY: Jurnal Matematika Murni dan Terapan*, vol. 3, no. 1, pp. 1–6, 2013.
- [9] M. K. Faseha & N. Helmi, "Visualisasi Variasi Motif Songket Sambas Menggunakan Metode L-Systems dan Himpunan Julia", *Binaster: Buletin Ilmiah Matematika, Statistika dan Terapannya*, vol. 08, no. 4, pp. 1–23, 2016
- [10] J. S. Hanan and R. Saskatchewan, *Parametric L-Systems and Their Application to the Modelling and Visualization of Plants*. Regina: Universitas Regina, 1992.
- [11] Rozida, "Variasi Sudut Belok Pada Fraktal i-Fibonacci Word dengan Menggunakan L-Systems", Skripsi, Jurusan Matematika FMIPA Universitas Jember, 2013.
- [12] R. Sholeha, K. D. Purnomo, and A. Riski, "Pengembangan batik fraktal berbasis Koch Snowflake (m, n, c) dan Koch Anti-Snowflake (m, n, c) menggunakan L-System," *Prism. Pros. Semin. Nas. Mat.*, vol. 3, pp. 147–155, 2020.
- [13] V. H. Suny, K. D. Purnomo, and F. Ubaidillah, "Pemanfaatan Metode Iterated Function System (IFS) Pada Pembangkitan Kurva Naga", *Majalah Ilmiah Matematika dan Statistika*, vol. 20, no. 2, p. 89, 2020, doi: 10.19184/mims.v20i2.15780.
- [14] D. S. Hadi, *Modul Grafika Komputer*, November. Bandung: Universitas Padjajaran, 2014.
- [15] Kusno, "Geometri Rancang Bangun Studi Tentang Desain dan Pemodelan Benda dengan Kurva dan Permukaan Berbantu Komputer", *Jurusan Matematika Fakultas MIPA*, Jember: Universitas Jember, 2017.

Interkoneksi Bilangan Bulat dan Pecahan dalam Matematika Madrasah Ibtidaiyah dengan Nilai – Nilai Islam

Firnanda Pradana Putra¹, Yosinta Sari², Fiqih Lukman Abid Syahputra³, Toni⁴

^{1,2,3,4}Jurusan Pendidikan Sains, Tadris Matematika, UIN Sultan Aji Muhammad Idris Samarinda

pradana.0712@gmail.com, sarivosinta@gmail.com, fiqhlasp@gmail.com, tonitonv063@gmail.com.

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima : 14 November 2024

Direvisi : 23 Januari 2025

Diterbitkan : 10 Februari 2025

Kata Kunci:

Bilangan Bulat
Pecahan
Matematika MI
Interkoneksi
Nilai-Nilai Islam

ABSTRAK

Matematika merupakan pelayan ilmu yang dapat diimplementasikan dalam kehidupan sehari-hari. Sebagai contoh, angka dapat digunakan sebagai tafsir data yang memuat kebijakan, menentukan arah kiblat dengan derajat atau sudut, serta masuknya bulan baru dalam hijriah yang melihat sudut atau derajat bulan. Seorang siswa MI yang diminta menyebutkan lima rukun islam dan enam rukun iman, maka ia perlu mengetahui hirarkis atau urutannya secara konsisten yang tentunya menjadi penciri khas ilmu matematika. Mengintegrasikan matematika dengan nilai – nilai islam dapat memperkuat dan memperkokoh keimanan kita kepada Allah SWT. Tujuan penulisan artikel ini yaitu menjelaskan hubungan bilangan bulat dan pecahan dalam matematika MI dengan nilai-nilai islam. Metode Penelitian dalam artikel ini menggunakan studi literatur dari berbagai sumber yang relevan, mencatat dan menuliskan hasilnya, serta mengolah hasil kajian sesuai format laporan yang berlaku. Hasil kajian literatur menunjukkan, bahwa pada surat Al-Kahfi ayat 25, adanya suatu operasi penjumlahan terkait pemuda yang tertidur di gua yakni 300 tahun ditambah 9 tahun yang berjumlah 309 tahun. angka 309 (bilangan bulat) melambangkan kekuasaan Allah yang menetapkan waktu dengan pasti dan tidak terpecah, seperti halnya ketetapan Allah yang tidak bisa diubah. Selanjutnya, pada surat An-nisa ayat 12, adanya sistem pembagian mawaris terhadap suatu kondisi yakni $\frac{1}{2}$ bagian, $\frac{1}{3}$ bagian, $\frac{1}{4}$ bagian, $\frac{1}{6}$ bagian, dan $\frac{1}{8}$ bagian. Bilangan pecahan merupakan bilangan bulat yang tidak dapat terpisahkan karena saling ketergantungan. Guru perlu merancang pembelajaran matematika berbasis nilai – nilai islam dengan model dan alat bantu atau alat peraga yang sesuai.

Copyright © 20XX SIMANIS.

All rights reserved.

Korespondensi:

Firnanda Pradana Putra
Tadris Matematika, Fakultas Tarbiyah dan Ilmu Keguruan
UIN Sultan Aji Muhammad Idris Samarinda,
Jl. HAM Rifaddin, Loa Janan Ilir, Kota Samarinda
pradana.0712@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Madrasah Ibtidaiyah (MI) adalah sekolah umat muslim yang memiliki hak dan kewajiban untuk menjalankan syariat-syariat islam, yang didalamnya meningkatkan kecerdasan spiritual.(Rosad, W.S., 2019). Melalui pendidikan MI diharapkan memberikan bekal pengetahuan untuk meningkatkan kompetensi siswa untuk meraih kesuksesan dan kebermanfaatannya ke depannya. Siswa sekolah dasar perlu mempelajari matematika

karena keterampilan ini membangun dasar penting yang mereka perlukan dalam kehidupan sehari-hari, perkembangan logika, serta kemampuan berpikir kritis.

Matematika sangat terstruktur dan memiliki aturan-aturan tertentu yang perlu dipahami dan diikuti, yang secara tidak langsung mengajarkan keteraturan dan disiplin. Ketika anak belajar matematika, mereka belajar untuk mengikuti langkah-langkah dan pola tertentu dalam penyelesaian masalah, yang mengembangkan pola pikir yang teratur dan disiplin.

Matematika berkaitan erat dengan angka, sehingga dikaitkan dengan konsep perhitungan yang melibatkan bilangan bulat dan pecahan, seperti menghitung berapa lama waktu yang dibutuhkan untuk membaca al-Qur'an dalam satu hari di bulan Ramadhan dan menghitung warisan. Jika seseorang membaca satu halaman al-Qur'an dalam waktu 1 menit, maka waktu yang dibutuhkan adalah 604 menit, yang dibagi menjadi 60 menit, hasilnya adalah 10,07 jam, yang dapat dibulatkan menjadi sekitar 10 jam. Artinya, jumlah waktu yang dibutuhkan untuk membaca al-Qur' Menurut Mahdalena (2017), ini juga berlaku untuk shalat berjama'ah yang diwajibkan. Shalat fardhu seseorang muslim diberikan satu kebaikan, satu pahala, atau, dengan kata lain, satu derajat apabila dia melakukannya sendiri. Namun apabila ia bergabung dengan jama'ah dengan menjadi imam atau makmum maka ia mendapat ganjaran 27 kali atau 27 kebaikan atau 27 pahala. Angka 27 merupakan angka biasa yang dilihat oleh kaum muslimin begitu saja dan diremehkan. Akan tetapi angka 27 sama dengan satu bulan kurang 2 atau tiga hari. Berarti shalat berjama'ah satu kali sama dengan shalat sendiri selama satu bulan kurang 2 atau 3 hari. Shalat berjama'ah satu hari sama dengan shalat sendiri selama satu bulan kurang 2 atau 3 tiga hari. Jika seorang mukmin tidak pernah meninggalkan shalat berjama'ah selama 13 hari, berarti pahalanya sama dengan seorang mukmin shalat sendiri selama satu tahun. Subhanalla benar-benar sebuah angka yang sangat signifikan bagi orang-orang yang mau memperhatikan (Mahdalena, 2017).

Integrasi nilai – nilai islam dengan matematika memberikan dampak bagi siswa terutama pada sikap terpuji (Kurnianti, 2015), yakni:

a. Sikap jujur, teliti, dan sederhana

Matematika memiliki prinsip kejujuran yakni proses yang dilakukan sesuai dengan prinsip atau teorema – teorema yang berlaku. Sebagai contoh, jika kita melakukan perhitungan $1 + 2 = 3$, maka tentu tidak boleh kita membenarkannya dengan $1 + 2 = 4$. Seseorang tidak dapat membantah dengan dalih, kitapun dalam proses perhitungannya harus cermat dan menggunakan metode yang sederhana dalam perhitungan.

b. Sikap konsisten dan sistematis terhadap aturan

Matematika memiliki ilmu yang berdasarkan kesepakatan yang sistematis dan kesepakatan ditaati dalam proses bekerja oleh setiap individu. Sebagai contoh, garis lurus disepakati memiliki besar sudut sebesar 180^0 , sehingga akan memudahkan dalam perhitungan sudut lainnya. Selain itu, jika kita amati bilangan kompleks yang terdiri dari bilangan real dan imajiner. Bilangan real terdiri rasional dan irrasional, serta bilangan rasional terdiri dari bilangan bulat dan pecahan. Jika kita amati contoh tersebut, maka matematika sangat sistematis dan konsisten.

c. Sikap adil

Dalam proses penyelesaian sistem persamaan linear, prinsip kesetimbangan atau keadilan diperlukan dalam menyelesaikan masalah. Sebagai contoh, jika kita menyelesaikan persamaan linear satu variabel berikut, maka perlu masing – masing ruas ditambahkan atau dikurangkan, serta dikalikan atau dibagikan dengan angka yang sama.

$$3x + 2 = 8$$

$$\leftrightarrow 3x + 2 - 2 = 8 - 2 \text{ (kedua ruas dikurangkan dengan 2)}$$

$$\leftrightarrow 3x = 6 \text{ (kedua ruad dibagi dengan 2)}$$

$$\leftrightarrow x = 2$$

d. Sikap tanggung jawab

Setiap menyelesaikan masalah, kita memerlukan referensi dari mana saja yang dapat dipertanggungjawabkan. Sebagai contoh, pembuktian teorema atau postulat merujuk pada definisi yang kebenarannya telah disepakati oleh para ahli.

Bilangan bulat memiliki banyak manfaat yang sangat penting dalam kehidupan sehari-hari maupun dalam bidang akademis. Dalam matematika, bilangan bulat digunakan untuk menghitung, mengukur, dan mengidentifikasi posisi dalam berbagai konteks, seperti dalam sains dan teknik. Selain itu juga bilangan bulat berperan dalam analisis data, komputer dan pemrograman, yang mana sering kali menggunakan operasi dasar seperti penjumlahan, pengurangan, dan lain-lain. Bilangan bulat juga berperan dalam bidang ekonomi, yaitu membantu dalam penghitungan anggaran dan laporan keuangan. Dengan kata lain, bilangan bulat adalah fondasi penting yang mendukung banyak aspek kehidupan dan teknologi modern.

Bilangan bulat merupakan bilangan yang terdiri dari bilangan positif, yang memiliki sifat-sifat bilangan asli dalam himpunan $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots\}$, serta bilangan negatif, yang merupakan kebalikan dari

himpunan bilangan asli, yaitu $A = \{-1, -2, -3, -4, -5, -6, \dots\}$. Selain itu, nol (0) merupakan bilangan yang tidak termasuk kategori positif maupun negatif, sehingga disebut sebagai bilangan netral. (Een Unaenah dkk., 2020). Hal ini bisa dikaitkan dengan ajaran Islam yang menekankan pemisahan yang jelas antara kebaikan (positif) dan keburukan (negatif). Dalam Islam, amal baik dan buruk memiliki nilai yang jelas, yang akan dihitung pada hari perhitungan. Pengelompokan bilangan bulat ini juga mengajarkan ketegasan dalam memilih jalan yang lurus dan menghindari jalan keburukan, karena setiap amal baik atau buruk memiliki konsekuensinya masing-masing, seperti halnya bilangan positif dan negatif memiliki nilai yang berbeda.

Urutan bilangan bulat yang konsisten (seperti $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$) mengajarkan keteraturan dan sistematis yang juga merupakan prinsip penting dalam Islam. Dalam ibadah, misalnya, umat Islam diajarkan untuk menjalankan shalat lima waktu dalam urutan dan waktu yang tepat, menunjukkan nilai keteraturan.

Dalam kehidupan sehari-hari, Bilangan Pecahan dapat digunakan sebagai pembagian yang adil seperti halnya pembagian makanan, uang kas ataupun lainnya. Bilangan Pecahan juga sangat membantu kita ketika menghitung diskon barang di pasar. Dalam ruang lingkup matematis Bilangan Pecahan sangat memudahkan kita ketika menghitung bilangan desimal. Dari penjabaran tersebut dapat kita simpulkan bahwa Bilangan Pecahan adalah salah satu bilangan yang wajib kita ketahui dan pahami.

Bilangan Pecahan adalah bilangan bulat yang terdiri dari pembilang dan penyebut. bilangan ini dapat ditulis dalam bentuk a dan b sebagai bilangan bulat dan b tidak sama dengan nol. Bilangan ini masih termasuk bilangan rasional, yang di mana bilangan pecahan juga bisa disebut pembagi seperti: $\frac{a}{b}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ dan lainnya (Aryanti, D., 2023).

2. METODE

Penelitian ini menggunakan studi literatur review dengan langkah – langkah yakni mengumpulkan bahan literatur, membaca dan mencatat sumber seperti artikel jurnal, Al – Qur'an, dan hadist. Setelah itu, mengolah bahan – bahan literatur melalui tahapan menelaah dan menganalisis serta menyusun laporan sesuai template jurnal yang berlaku. Menurut Royani & Nur'aeni L (2020), sumber – sumber pada studi literatur berasal dari jurnal yang dipilih sesuai kebutuhan, shahih serta memiliki kriteria seperti terdapat nama penulis, judul penelitian, dan relevan. Adapun penelitian ini bertujuan untuk menjelaskan interkoneksi bilangan bulat dan pecahan dalam matematika madrasah ibtidaiyah dengan nilai – nilai islam.

3. PEMBAHASAN

a. Hubungan Bilangan Bulat dengan Nilai-Nilai Islam

Bilangan bulat merupakan angka – angka yang bukan pecahan, irasional, dan imajiner. Menurut Mayrani & Hasanudin (2024), bilangan bulat termasuk angka yang meliputi positif, negatif, dan nol dalam himpunan bilangan, kecuali pecahan, rasional, dan imajiner. Dalam ayat-ayat Al-Qur'an, kita sering menemukan bilangan-bilangan bulat yang memiliki makna simbolis dan mendalam. Seperti contoh, rukun iman terdapat sebanyak 6 butir yang menjadi keyakinan dan rukun islam terdapat 5 butir yang menjadi ditegakkan. Siswa telah dikenalkan rukun iman dan islam sejak sekolah dasar atau Madrasah Ibtidaiyah. Guru perlu membunyikan bilangan bulat sebagai hal yang dapat ditarik nilai – nilai islam yang terkandung didalamnya, sehingga siswa menjadi lebih yakin dan memahami nilai – nilai islam dan meningkatkan ketakwaan bagi mereka. Setiap bilangan tersebut tidak hanya sekadar angka, tetapi juga mengandung hikmah, nilai, dan pelajaran yang dapat memperkuat dan memperteguh keimanan serta memperkaya pemahaman kita tentang ajaran Islam. Bilangan-bilangan ini hadir dalam berbagai konteks, mulai dari kisah-kisah para nabi, hukum-hukum syariat, hingga tanda-tanda kekuasaan Allah SWT yang tersebar di alam semesta. Contoh lainnya, dalam qur'an surah al-ikhlas ayat 1 yang berbunyi:

قُلْ هُوَ اللَّهُ أَحَدٌ

Terjemahan: Katakanlah (Muhammad), "Dialah Allah, Yang Maha Esa. (Sumber: Surah Al-Ikhlâs - 1-4 - Quran.com)

Dalam ayat di atas terdapat kalimat (أَحَدٌ) yang dalam bahasa arab diambil dari kata *wahid* yang berarti satu. Angka satu melambangkan keesaan Allah sebagai Tuhan yang Esa, yang menjadi inti dari tauhid dalam Islam. Terdapat contoh lain pula pada surah al-kahfi ayat 25 yang berbunyi:

وَأَلْبِئُوا فِي كَهْفِهِمْ ثَلَاثَ مِائَةٍ سِنِينَ وَارْدَاؤُا تِسْعًا

Terjemahan: Dan mereka tinggal dalam gua selama tiga ratus tahun dan ditambah sembilan tahun.
(Sumber: Surah Al-Kahf - 1-110 - Quran.com)

Dalam ayat di atas terdapat sebuah operasi penjumlahan terkait pemuda yang tertidur di gua yakni tiga ratus tahun ditambah sembilan tahun yang hasilnya berjumlah tiga ratus sembilan tahun. Melalui angka-angka ini, kita diingatkan untuk merenungi kebesaran-Nya dan memahami bahwa segala sesuatu dalam Al-Qur'an memiliki maksud dan tujuan, termasuk bilangan-bilangan yang disebutkan. Ini menjadi bukti bahwa Al-Qur'an tidak hanya mengajarkan keimanan, tetapi juga mengajak kita untuk berpikir, menghayati, dan mengambil pelajaran dari setiap kata dan bilangan yang tertulis. Seperti kata Dr. Yusuf Al-Qardhawi (1984), Islam adalah akidah yang berdasarkan ilmu pengetahuan, bukan penyerahan diri secara membabi buta (Mahdalena, 2017). Guru dapat menerapkan pembelajaran berbasis nilai – nilai islam yang terhubung dengan matematika dengan langkah – langkah yakni masalah kontekstual, menjelaskan masalah kontekstual, menyelesaikan masalah kontekstual, membandingkan dan mendiskusikan jawaban, dan memberikan kesimpulan. Melalui pendekatan pembelajaran realistik ini, siswa dapat membangun komunikasi matematis siswa dan guru. Menurut Indriani & Imanuel (2018), pembelajaran matematika realistik dapat membangun komunikasi antar siswa dalam memecahkan masalah matematika dan guru sebagai fasilitator dapat mempersiapkan contoh masalah dan alternatif solusi yang dapat diberikan kepada siswa.

b. Hubungan Bilangan Bulat dan Bilangan Pecahan dengan Nilai-Nilai Islam

Bilangan pecahan memiliki bentuk $\frac{a}{b}$ dengan $b \neq 0$, serta a dan b merupakan bilangan bulat. Hubungan bilangan pecahan dengan bulat tidak dapat dipisahkan karena saling ketergantungan. Berdasarkan ayat 12 surat an-nisa dan ayat 25 surat al-kahfi menjelaskan bahwa pada kedua ayat ini terdapat bilangan bulat dan bilangan pecahan. Bilangan bulat terdapat pada ayat 25 surat al-kahfi yaitu bilangan 309. Bilangan ini merujuk pada lamanya waktu para pemuda al-kahfi tertidur di gua (Istiqomah & Rumtinaing, 2022). Dalam islam, waktu merupakan suatu ketetapan Allah yang tidak bisa diubah. Waktu 309 tahun ini menunjukkan besarnya kekuasaan Allah dalam mengatur perjalanan hidup hambanya yang di luar kemampuan nalar yang dimiliki manusia.

Nilai - nilai Islam yang terkandung dalam bilangan bulat yakni kekuasaan Allah, yang mana pemuda ashabul kahfi ini ditidurkan selama 309 tahun di dalam gua. Ini mengingatkan kita akan kekuasaan Allah dalam mengatur perjalanan hidup seorang hamba. Ketepatan waktu dalam takdir, Allah menetapkan takdir seorang hamba dengan sempurna tanpa bisa dibagi atau diubah, menyerupai dengan bilangan bulat yang tidak terpecah. Ini mengingatkan kita agar senantiasa bersyukur atas apa yang Allah tetapkan. Sedangkan dalam ayat 12 surat an nisa terdapat konsep pembagian warisan terhadap ahli waris yang bagiannya menggunakan bilangan pecahan. Contoh seorang istri yang mendapat bagian $\frac{1}{2}$, apabila mayit tidak meninggalkan anak, dan mendapatkan $\frac{1}{4}$ bagian, apabila mayit meninggalkan anak. Pembagian warisan ini menggunakan bilangan pecahan yang menggambarkan suatu keadaan tertentu. Bilangan pecahan ini menunjukkan keadilan, yang mana pembagian warisan dalam islam berdasarkan kondisi keluarga (apakah memiliki anak atau tidak). Ini mencerminkan prinsip keadilan, dimana hak masing-masing diberikan dengan proporsi yang adil dan sesuai.

Nilai-nilai yang terkait dengan bilangan pecahan yakni: Keadilan dan proporsi, yaitu dalam pembagian warisan yang proporsional ada takaran tertentu untuk ahli waris sesuai dengan keadaan hak dan kewajiban, setiap orang berhak mendapatkan bagiannya secara adil. Ini mengajarkan kita untuk berlaku adil dalam memberikan hak setiap individu sesuai dengan kewajiban dan kondisi mereka.

c. Hubungan Bilangan Pecahan dengan Nilai – Nilai Islam

Bilangan pecahan merupakan bagian dari bilangan bulat. Sebagai contoh, $\frac{1}{2}$ potongan benda merupakan bagian dari 1 benda yang utuh. Siswa Madrasah Ibtidaiyah dapat diperkenalkan sebuah kue yang dipotong menjadi beberapa bagian dan bagian kue tersebut disebut sebagai pecahan. Pembelajaran matematika mempunyai peranan yang sangat penting dalam pengembangan potensi siswa di sekolah. Guru perlu merancang pembelajaran yang melibatkan alat bantu atau alat peraga sehingga dapat meningkatkan pemahaman konsep siswa. Menurut Taufikurrahman & Nurhaswinda (2021), penggunaan media pembelajaran dapat meningkatkan pemahaman konsep matematika sebesar 80%. Oleh karena itu,

pembelajaran matematika dapat dirancang dengan konteks kehidupan sehari – sehari juga terhubung dengan nilai – nilai islam dan menggunakan alat peraga yang sesuai.

Islam menekankan pentingnya ilmu pengetahuan, termasuk matematika, dan menganjurkan umatnya untuk menuntut ilmu. Matematika bukan hanya tentang kemampuan berhitung, tetapi juga tentang berpikir logis. Konsep matematika dapat diintegrasikan ke dalam ajaran Islam untuk menjelaskan pemahaman agama. Salah satunya matematika tentang bilangan pecahan, yang dimana bilangan pecahan ini berhubungan dan berkaitan dengan pembagian warisan seperti yang di jelaskan pada Al-Qur'an surah An-Nisa ayat 12, sebagaimana arti berikut:

“Bagimu (para suami) seperdua dari harta yang ditinggalkan oleh istri-istrimu, jika mereka tidak mempunyai anak. Jika mereka (istri-istrimu) itu mempunyai anak, kamu mendapat seperempat dari harta yang ditinggalkannya setelah (dipenuhi) wasiat yang mereka buat atau (dan setelah dibayar) utangnya. Bagi mereka (para istri) seperempat harta yang kamu tinggalkan jika kamu tidak mempunyai anak. Jika kamu mempunyai anak, bagi mereka (para istri) seperdelapan dari harta yang kamu tinggalkan (setelah dipenuhi) wasiat yang kamu buat atau (dan setelah dibayar) utang-utangmu. Jika seseorang, baik laki-laki maupun perempuan, meninggal dunia tanpa meninggalkan ayah dan anak, tetapi mempunyai seorang saudara laki-laki (seibu) atau seorang saudara perempuan (seibu), bagi masing-masing dari kedua jenis saudara itu seperenam harta. Akan tetapi, jika mereka (saudara-saudara seibu itu) lebih dari seorang, mereka bersama-sama dalam bagian yang sepertiga itu, setelah (dipenuhi wasiat) yang dibuatnya atau (dan setelah dibayar) utangnya dengan tidak menyusahkan (ahli waris).¹⁴⁷⁾ Demikianlah ketentuan Allah. Allah Maha Mengetahui lagi Maha Penyantun (Qur'an Kemenag, 2022).

Didalam satu ayat surah diatas kita dapat mengetahui dari Al-Qur'an surah An-Nisa ayat 12 di atas dapat diterjemahkan bahwa terdapat bilangan pecahan yang membahas:

1) Keadilan dalam Pembagian Warisan

Dalam Surah An-Nisa ayat 12, Allah SWT memberikan pembagian yang sangat rinci terhadap harta warisan dengan menggunakan bilangan pecahan, yaitu setengah ($\frac{1}{2}$), seperempat ($\frac{1}{4}$), dan delapan per sepuluh ($\frac{8}{10}$). Pembagian ini menunjukkan bahwa Islam sangat memperhatikan keadilan dalam pembagian harta, terutama dalam konteks warisan.

Sebagai contoh, ayat ini menjelaskan bahwa jika seorang istri meninggal dan tidak memiliki anak, suami berhak mendapatkan setengah ($\frac{1}{2}$) dari harta peninggalannya. Jika istri memiliki anak, suami hanya mendapatkan seperempat ($\frac{1}{4}$) dari harta tersebut. Sebaliknya, istri yang ditinggalkan oleh suami, jika tidak memiliki anak, berhak mendapatkan seperempat ($\frac{1}{4}$) dari harta suaminya. Namun, jika suami memiliki anak, istri akan mendapat delapan per sepuluh ($\frac{8}{10}$) dari harta warisan tersebut (Suriyanto, 2022).

Pembagian yang sangat terperinci ini memberikan contoh konkret bagaimana bilangan pecahan berfungsi untuk menjamin keadilan dan keseimbangan dalam pembagian harta warisan, serta mencegah adanya ketimpangan yang bisa merugikan pihak tertentu. Hal ini mencerminkan nilai-nilai Islam yang sangat menjunjung tinggi keadilan dalam setiap aspek kehidupan, baik itu dalam hubungan antar sesama manusia maupun dalam pembagian hak-hak milik.

2) Pembagian yang Proporsional dan Sesuai dengan Kebutuhan

Bilangan pecahan dalam ayat ini tidak hanya mencerminkan keadilan, tetapi juga proporsionalitas. Misalnya, jika seorang istri meninggalkan suami tanpa anak, suami mendapatkan setengah harta, yang menunjukkan besarnya tanggung jawab suami dalam keluarga. Sebaliknya, jika ada anak, suami hanya mendapatkan seperempat, karena anak-anak sebagai pewaris utama juga memiliki hak yang lebih besar. Ini menunjukkan bahwa Islam mengajarkan pembagian yang sesuai dengan hak dan kebutuhan masing-masing pihak.

Prinsip ini juga mengajarkan pentingnya menyesuaikan hak seseorang dengan kondisi dan peran mereka dalam kehidupan. Dalam kehidupan sehari-hari, prinsip ini bisa diterapkan dalam berbagai konteks, seperti pembagian rezeki, waktu, atau tanggung jawab. Misalnya, seorang pemimpin yang memiliki banyak tanggung jawab, seharusnya mendapatkan porsi yang lebih besar dalam hal perhatian dan kontribusi terhadap umat.

3) Menghormati Setiap Bagian dari Kehidupan

Bilangan pecahan mengajarkan kita untuk menghargai setiap bagian dari sesuatu. Dalam konteks warisan, meskipun yang diperoleh mungkin hanya sebagian kecil dari keseluruhan, setiap bagian tersebut memiliki nilai yang sangat penting. Allah SWT melalui ayat ini mengajarkan kita untuk menghargai hak setiap orang sesuai dengan proporsi yang telah ditetapkan-Nya.

4) Keseimbangan dalam Kehidupan

Pecahan dalam pembagian warisan dalam Surah An-Nisa ayat 12 juga mencerminkan keseimbangan yang harus dijaga dalam hidup. Dalam Islam, keseimbangan adalah hal yang sangat penting, baik dalam aspek ibadah maupun sosial. Seperti halnya pembagian warisan yang memadukan antara hak suami dan istri, hak anak dan orang tua, kehidupan juga harus dijalani dengan memperhatikan keseimbangan antara hak dan kewajiban, antara dunia dan akhirat, serta antara individu dan masyarakat.

Bilangan pecahan mengajarkan kita bahwa setiap bagian dari kehidupan, tidak peduli besar atau kecil, memiliki tempat dan fungsinya masing-masing, dan semuanya harus ditempatkan dengan tepat sesuai dengan proporsi yang adil dan bijaksana.

5) Tanggung Jawab dalam Pembagian

Pembagian harta warisan yang disebutkan dalam Surah An-Nisa ayat 12 juga mengandung pesan bahwa setiap orang memiliki tanggung jawab yang berbeda sesuai dengan posisinya dalam keluarga. Suami, istri, dan anak memiliki hak dan kewajiban yang saling terkait dan saling melengkapi. Bilangan pecahan menggambarkan tanggung jawab yang harus dipikul oleh masing-masing pihak dalam pembagian harta tersebut, yang pada gilirannya menciptakan hubungan yang harmonis dan adil dalam kehidupan keluarga.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan di atas, maka dapat disimpulkan hubungan konsep bilangan bulat dan pecahan dengan nilai – nilai islam sebagai berikut:

- a. Al-Qur'an mengandung ajaran tentang nilai-nilai Islam yang tercermin dalam konsep bilangan bulat dan bilangan pecahan. Dalam Surat Al-Kahfi ayat 25, angka 309 (bilangan bulat) melambangkan kekuasaan Allah yang menetapkan waktu dengan pasti dan tidak terpecah, seperti halnya ketetapan Allah yang tidak bisa diubah. Ini mengingatkan manusia untuk bersyukur dan menyadari keagungan Allah dalam menjalani dan mengatur kehidupan. Guru dapat mempersiapkan pembelajaran berbasis nilai – nilai islam yang terkoneksi dengan matematika melalui contoh masalah dan alternatif Solusi yang sesuai.
- b. Surat An-Nisa ayat 12, konsep bilangan pecahan digunakan dalam pembagian warisan yang adil sesuai dengan keadaan keluarga. Bilangan pecahan ini mencerminkan nilai keadilan, karena setiap ahli waris mendapat bagian yang proporsional berdasarkan kondisi tertentu, seperti memiliki anak atau tidak. Hal ini mengajarkan umat Islam untuk berlaku adil dalam memberikan hak-hak setiap individu sesuai dengan kebutuhan dan tanggung jawabnya. Bilangan pecahan memiliki bentuk $\frac{a}{b}$ dengan $b \neq 0$, serta a dan b merupakan bilangan bulat, sehingga menjadi ketergantungan bilangan pecahan dan bilangan bulat. Guru dapat menggunakan alat bantu dalam merancang pembelajaran, sehingga meningkatkan pemahaman konsep siswa.

5. UCAPAN TERIMAKASIH

Penelitian ini terlaksana tidak terlepas dari berbagai pihak bantuan khususnya UIN Sultan Aji Muhammad Idris Samarinda. Oleh karena itu, peneliti mengucapkan terimakasih kepada Rektor UIN Sultan Aji Muhammad Idris Samarinda, Mahasiswa Tadris Matematika, dan Panitia Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai Islami (SI MaNIs) tahun 2024 oleh Program Studi Matematika, Tadris Matematika, dan Magister Pendidikan Matematika Universitas Islam Negeri Maulana Malik Ibrahim Malang. Semoga memberikan manfaat bagi penulis, lembaga – lembaga kampus, sekolah, dan dunia pendidikan Indonesia.

6. DAFTAR PUSTAKA

- [1] Aryanti, D. (2023). Peningkatan Hasil Belajar Materi Pecahan Melalui Media Visual Di Kelas IV Sekolah Dasar. *Inopendas Jurnal Ilmiah Kependidikan*, 27-34.
- [2] Indriani, M. N. & Imanuel (2018.). Pembelajaran Matematika Realistik dalam Permainan Edukasi Berbasis Keunggulan Lokal untuk Membangun Komunikasi Matematis. *PRISMA: Prosiding Seminar Nasional Matematika*. <https://journal.unnes.ac.id/sju/index.php/prisma/>
- [3] Istiqomah, S., & Rumtinaing, I. (2022). Kisah Ashabul Kahfi dalam Al-Qur'an: Kajian Komparatif antara Tafsir Al-Misbah dan Tafsir Ibnu Katsir. *Jurnal Studi Islam dan Masyarakat*, 46-57.
- [4] Kurnianti, A. (2015). Mengenalkan Matematika Terintegrasi Islam kepada Anak Sejak Dini. *Suska Journal of Mathematics Education*, 1-8.

-
- [5] Mahdalena. (2017). *Pembelajaran Matematika dan Konsepnya dalam Al-Qur'an*. Lhokseumawe: Unimal Press.
- [6] Mayrani, C., & Hasanudin, C. (2024). Mengenal Konsep Bilangan Bulat dan Bilangan Pecahan di Sekolah Dasar. *Prosiding Seminar Nasional Unit Kegiatan Mahasiswa Penalaran dan Riset IKIP PGRI Bojonegoro*.
- [7] Qur'an Kemenag. (2022, September Monday). *Qur'an Kemenag*. Retrieved from quran.kemenag.go.id: <https://quran.kemenag.go.id/quran/per-ayat/surah/36?from=40&to=83>
- [8] Rosad, W. S. (2020). Pelaksanaan Shalat Dhuha dalam Meningkatkan Kecerdasan Spiritual Siswa Kelas 3 Madrasah Ibtidaiyah Ma'arif NU Ajibarang Wetan. *Jurnal Kajian Keislaman*, 119-138.
- [9] Royani, I., & Nur'aeni L, E. (2020). Studi Literatur tentang Model Pembelajaran Berbasis Teori Van Hiele terhadap Kemampuan Komunikasi Matematis Siswa Sekolah Dasar . *PEDADIDAKTIKA: Jurnal Ilmiah Pendidikan Guru Sekolah Dasar*, 93 - 108.
- [10] Surianto. (2022). Matematika dalam Al-Qur'an. *Jurnal Al' Adad*, 7.
- [11] Taufikurrahman & Nurhaswinda (2021). Penggunaan Media Pembelajaran Papan Pecahan untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Matematika Pada Siswa Sekolah Dasar. *Jurnal Pendidikan dan Konseling* (Vol. 3).
- [12] Unaenah, E., Sutisna, A., Utami, W. D., & Shafani, H. T. (2020). Analisis Pembelajaran Bilangan Bulat dengan Alat Permainan Edukatif untuk Meminimalisir Miskonsepsi Peserta Didik. *Pensa: Jurnal Pendidikan dan Ilmu Sosial*, 134-152.
- [13] [Surah Al-Ikhlâs - 1-4 - Quran.com](#)

Fungsi Lancip dan Karakteristiknya

Firdaus Ubaidillah¹, Kosala Dwidja Purnomo², Bagus Juliyanto³

^{1,2,3}Jurusan Matematika, Fakultas MIPA Universitas Jember

¹firdaus_u@yahoo.com, ²kosala.fmipa@unej.ac.id, ³bagus@fmipa.unej.ac.id

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima : 14 November 2024

Direvisi : 26 Januari 2025

Diterbitkan : 10 Februari 2025

Kata Kunci:

Fungsi terdiferensialkan

Fungsi lancip

Fungsi lancip ke atas

Fungsi lancip ke bawah

ABSTRAK

Pada fungsi satu peubah, fungsi terdiferensialkan di suatu titik merupakan fungsi terdiferensialkan kiri dan terdiferensialkan kanan serta nilai derivatif kiri dan derivatif kanannya sama. Tujuan penelitian ini adalah untuk mengenalkan istilah baru fungsi lancip, yakni fungsi yang terdiferensial kiri dan terdiferensial kanan namun nilai derivatif kiri dan derivatif kanannya tidak sama. Selain itu, akan dibahas beberapa karakteristik dasar dari fungsi lancip dengan memulai dari mengenalkan istilah fungsi lancip ke atas dan fungsi lancip ke bawah. Lebih jauh, akan dibahas beberapa karakteristik lanjutan fungsi lancip yang dituangkan dalam teorema-teorema.

Copyright © 20XX SIMANIS.

All rights reserved.

Korespondensi:

Firdaus Ubaidillah,
Jurusan Matematika,
Fakultas MIPA Universitas Jember,
Jl. Kalimantan 37 Jember, Jawa Timur, Indonesia 68121
firdaus_u@yahoo.com

1. PENDAHULUAN

Konsep kalkulus diferensial telah dikembangkan oleh Issac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz menjelang akhir abad ke-17, tetapi dalam konsep yang lebih modern dikembangkan oleh A.L. Cauchy pada awal abad ke-19. Kalkulus diferensial biasanya dipahami sebagai kalkulus diferensial klasik, yang berkaitan dengan fungsi bernilai real atas satu atau lebih peubah-peubah real. Namun definisi modernnya juga dapat mencakup kalkulus diferensial dalam ruang abstrak. Kalkulus diferensial didasarkan pada konsep bilangan real, fungsi, limit, dan kekontinuan [1].

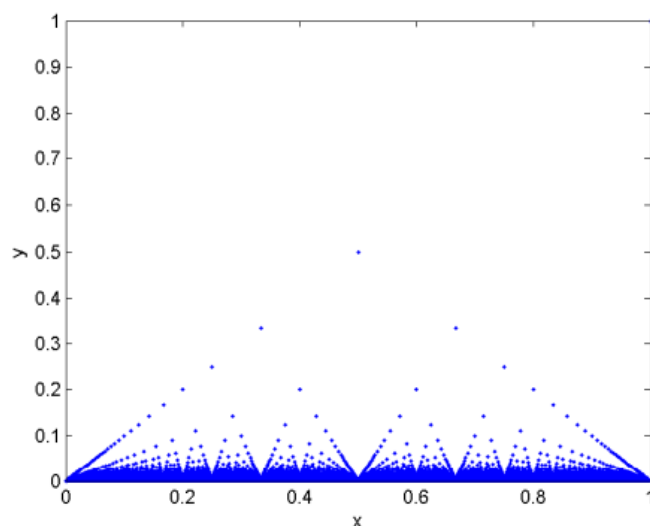
Beberapa matematikawan mengenalkan fungsi-fungsi khusus yang unik, seperti P.G.L. Dirichlet pada tahun 1829 mengenalkan fungsi yang didefinisikan

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{jika } x \text{ rasional} \\ 0 & , \text{untuk } x \text{ yang lain} \end{cases}$$

yang merupakan fungsi tidak kontinu dimana-mana pada \mathbb{R} [2], yang selanjutnya disebut fungsi Dirichlet. Karl Weierstrass pada tahun 1872 mengenalkan contoh fungsi yang kontinu pada domainnya tetapi tidak terdiferensialkan dimana-mana [3]. Kemudian Carl Johannes Thomae pada tahun 1875 memodifikasi fungsi Dirichlet menjadi fungsi yang kontinu untuk setiap bilangan irasional dan tidak kontinu untuk setiap bilangan rasional pada domainnya [4], selanjutnya disebut fungsi Thomae, didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} 1/q, & \text{jika } x = p/q \text{ dan } \gcd(p, q) = 1 \\ 0 & , \text{jika } x \text{ irrasional} \end{cases}$$

yang grafiknya diberikan pada Gambar 1.

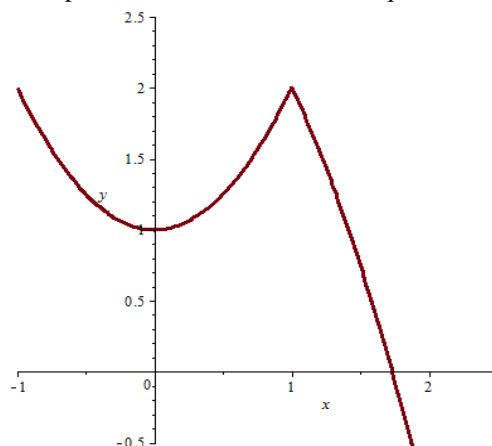


Gambar 1. Grafik fungsi Thomae pada selang $[0, 1]$

Sebagaimana telah diketahui bersama, seperti dalam [2], [5], dan [6], bahwasanya fungsi $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ dikatakan terdiferensialkan di titik $c \in [a, b]$ jika fungsi f terdiferensialkan kanan dan terdiferensialkan kiri di titik c serta derivatif kanan dan kiri fungsi f di titik c sama. Fungsi yang tidak terdiferensialkan di suatu titik dapat terjadi karena fungsi tersebut tidak terdiferensialkan kanan atau tidak terdiferensialkan kiri di titik tersebut, atau terdiferensialkan kanan dan kiri tetapi derivatif kanan dan kiri di titik tersebut tidak sama. Grafik fungsi yang terdiferensialkan kanan dan kiri di suatu titik tetapi derivatifnya tidak sama terlihat “lancip”. Sebagai contoh fungsi f yang didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \leq 1 \\ 3 - x^2, & x > 1 \end{cases}$$

merupakan fungsi terdiferensialkan kanan dan terdiferensialkan kiri di $x = 1$ dengan derivatif kanan -2 dan derivatif kiri 2 yang grafiknya diberikan pada Gambar 2, terlihat “lancip” di $x = 1$.



Gambar 2. Grafik fungsi f yang terdiferensialkan kanan dan kiri di $x = 1$ tetapi derivatif kanan dan kiri tidak sama

Tujuan dari penelitian ini adalah untuk mengenalkan istilah baru fungsi lancip di suatu titik, yakni fungsi yang terdiferensialkan kanan dan terdiferensialkan kiri tetapi nilai derivatif kanan dan derivatif kiri tidak sama. Lebih jauh, akan digali beberapa karakteristik dasar dari fungsi lancip dan kelancipan fungsi yang disajikan dalam beberapa teorema.

Beberapa Definisi

Sebelum membahas hasil-hasil penelitian, terlebih dahulu ditinjau pengertian atau definisi dan sifat-sifat fungsi terdiferensialkan dan semi-terdiferensialkan sebagai dasar dalam penelitian ini yang diambil dari [2] dan [7].

Definisi 1. Diberikan $I \subseteq \mathbb{R}$ selang, $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi, dan $c \in I$.

- (i). Bilangan L disebut **derivatif kanan** f di c jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta(\epsilon) > 0$ sehingga jika $x \in I$ yang memenuhi $0 < x - c < \delta$ maka

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \epsilon$$

Dalam kasus ini, dikatakan f **terdiferensialkan kanan** di c , dan ditulis $f'_+(c) = L$.
 Dengan kata lain, derivatif kanan f di c diberikan sebagai

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

asalkan limitnya ada.

- (ii). Bilangan L disebut **derivatif kiri** f di c jika untuk setiap $\epsilon > 0$ terdapat $\delta(\epsilon) > 0$ sehingga jika $x \in I$ yang memenuhi $0 < c - x < \delta$ maka

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \epsilon$$

Dalam kasus ini, dikatakan f **terdiferensialkan kiri** di c , dan ditulis $f'_-(c) = L$.
 Dengan kata lain, derivatif kiri f di c diberikan sebagai

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

asalkan limitnya ada.

- (iii). Fungsi f dikatakan **terdiferensialkan** di c jika f terdiferensialkan kanan dan kiri di c serta derivatif kanan dan kirinya sama.
 (iv). Fungsi f dikatakan **semi-terdiferensialkan** di c jika f terdiferensialkan kanan dan terdiferensialkan kiri di c .

Akibat dari Definisi 1 (iii) dan (iv), maka fungsi yang terdiferensialkan di c merupakan fungsi semi-terdiferensialkan di c , tetapi tidak sebaliknya.

Berikut beberapa sifat fungsi semi-terdiferensialkan yang diberikan dalam teorema berikut.

Teorema 2. Jika f dan g keduanya fungsi semi-terdiferensialkan di c dengan derivatif kanan f di c adalah $f'_+(c)$, derivatif kiri f di c adalah $f'_-(c)$, derivatif kanan g di c adalah $g'_+(c)$, dan derivatif kiri g di c adalah $g'_-(c)$, maka

- (i). untuk setiap $\alpha \in \mathbb{R}$, αf merupakan fungsi semi-terdiferensialkan dan $(\alpha f)'_+(c) = \alpha f'_+(c)$ dan $(\alpha f)'_-(c) = \alpha f'_-(c)$
 (ii). $f + g$ merupakan fungsi semi-terdiferensialkan dan $(f + g)'_+(c) = f'_+(c) + g'_+(c)$ dan $(f + g)'_-(c) = f'_-(c) + g'_-(c)$

2. METODE PENELITIAN

Metode dalam penelitian ini dimulai dengan mendefinisikan istilah baru fungsi lancip ke atas dan fungsi lancip ke bawah. Pengenalan istilah baru fungsi lancip ke atas dan fungsi lancip ke bawah di suatu titik diawali dengan fungsi yang terdiferensialkan kanan dan kiri tetapi derivatif kanan dan kirinya tidak sama, sehingga selisih derivatif kanan dan derivatif kiri tidak nol. Kemudian dari istilah fungsi lancip ke atas dan fungsi lancip ke bawah ini dikembangkan pula istilah fungsi lancip. Untuk menentukan besar kelancipannya dihitung berdasarkan sudut yang dibentuk dari derivatif kanan dan derivatif kiri. Semakin kecil sudut yang dibentuk maka semakin lancip/tajam nilai kelancipannya.

Dari definisi yang telah dijelaskan, kemudian dieksplorasi beberapa karakteristik dasar dan lanjutan fungsi lancip. Kemudian beberapa karakteritik dari fungsi lancip disajikan dalam bentuk teorema-teorema dan akibat-akibatnya yang dilengkapi dengan pembuktiannya.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Untuk mengawali hasil penelitian dan pembahasan ini, dikenalkan terlebih dahulu definisi fungsi lancip ke atas dan fungsi lancip ke bawah di suatu titik.

Definisi 3. Diberikan $c \in [a, b]$ dan $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fungsi semi-terdiferensialkan di titik c dengan derivatif kiri $f'_-(c)$ dan derivatif kanan $f'_+(c)$.

- (i). Fungsi f dikatakan **lancip ke atas** di titik c jika $f'_-(c) - f'_+(c) > 0$,
 (ii). Fungsi f dikatakan **lancip ke bawah** di titik c jika $f'_-(c) - f'_+(c) < 0$, dan
 (iii). Fungsi f dikatakan **lancip** di c jika f lancip ke atas atau lancip ke bawah di c .

Untuk memperjelas definisi fungsi lancip ke atas dan fungsi lancip ke bawah, diberikan contoh sebagai berikut.

Contoh 4. Diberikan dua fungsi $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ yang masing-masing didefinisikan sebagai

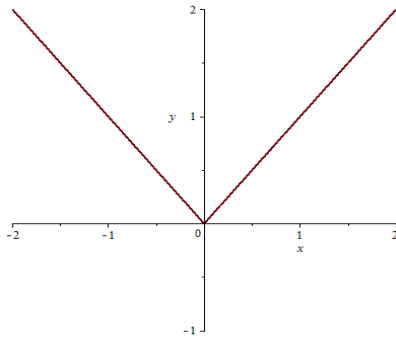
Fungsi Lancip dan Karakteristiknya (Firdaus Ubaidillah)

$$f(x) = |x|, \quad \text{untuk setiap } x \in \mathbb{R},$$

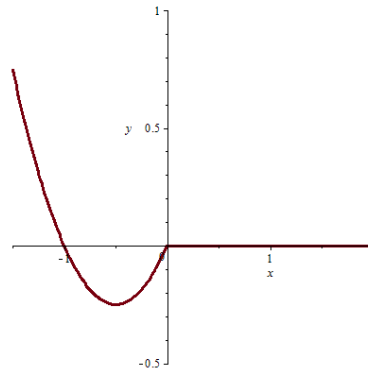
dan

$$g(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$$

Diperhatikan bahwa, $f'_-(0) = -1$, $f'_+(0) = 1$, $g'_-(0) = 1$, dan $g'_+(0) = 0$. Karena $f'_-(0) - f'_+(0) = -1 - 1 = -2 < 0$ dan $g'_-(0) - g'_+(0) = 1 - 0 = 1 > 0$, maka f merupakan fungsi lancip ke bawah dan g fungsi lancip ke atas di $x = 0$. Grafik kedua fungsi tersebut diberikan pada Gambar 3.



(a). Grafik fungsi $f(x) = |x|$



(b). Grafik fungsi $g(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x \leq 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

Gambar 3. Grafik fungsi lancip ke bawah dan lancip ke atas di $x = 0$

Jika diperhatikan, suatu fungsi lancip di $x = c$ merupakan fungsi kontinu di $x = c$. Jelaslah, bahwa fungsi yang tidak kontinu di $x = c$ tidak akan bisa menjadi fungsi lancip di titik tersebut. Jadi fungsi lancip di $x = c$ adalah fungsi semi-terdiferensialkan tetapi tidak terdiferensialkan di $x = c$.

Selanjutnya diberikan beberapa karakteristik dasar fungsi lancip ke atas dan fungsi lancip ke bawah dalam beberapa teorema berikut.

Teorema 5. Jika f dan g keduanya fungsi lancip ke atas di $x = c$, maka

- (i). a. Untuk $\alpha > 0$, fungsi αf lancip ke atas di $x = c$,
b. Untuk $\alpha < 0$, fungsi αf lancip ke bawah di $x = c$,
- (ii) fungsi $f + g$ lancip ke atas di $x = c$.

Bukti:

(i) a. Diberikan $\alpha > 0$. Karena f fungsi lancip ke atas di $x = c$, maka diperoleh

$$(\alpha f)'_-(c) - (\alpha f)'_+(c) = \alpha f'_-(c) - \alpha f'_+(c) = \alpha(f'_-(c) - f'_+(c)) > 0$$

Jadi αf fungsi lancip ke atas di $x = c$.

b. Diberikan $\alpha < 0$. Karena f fungsi lancip ke atas di $x = c$, maka diperoleh

$$(\alpha f)'_-(c) - (\alpha f)'_+(c) = \alpha f'_-(c) - \alpha f'_+(c) = \alpha(f'_-(c) - f'_+(c)) < 0$$

Jadi αf fungsi lancip ke bawah.

(ii). Karena f dan g keduanya fungsi lancip ke atas di $x = c$, maka diperoleh

$$\begin{aligned} (f + g)'_-(c) - (f + g)'_+(c) &= f'_-(c) + g'_-(c) - f'_+(c) - g'_+(c) \\ &= (f'_-(c) - f'_+(c)) + (g'_-(c) - g'_+(c)) > 0 \end{aligned}$$

Jadi $f + g$ fungsi lancip ke bawah di $x = c$.

Teorema 6. Jika f dan g keduanya fungsi lancip ke bawah di $x = c$, maka

- (i). a. Untuk $\alpha > 0$, fungsi αf lancip ke bawah di $x = c$,
b. Untuk $\alpha < 0$, fungsi αf lancip ke atas di $x = c$,
- (ii) fungsi $f + g$ lancip ke bawah di $x = c$,

Bukti:

Bukti serupa dengan bukti pada Teorema 5.

Jika f dan g keduanya fungsi lancip di $x = c$, penjumlahan atau pengurangan kedua fungsi f dan g belum bisa ditentukan kelancipannya, karena hal ini tergantung dari derivatifnya masing-masing. Sebagai contoh, fungsi $f(x) = |x|$ dan $g(x) = -|x|$ keduanya merupakan fungsi lancip di $x = 0$, tetapi $(f + g)(x) = |x| - |x| = 0$ bukan merupakan fungsi lancip di $x = 0$.

Selanjutnya, jika f fungsi lancip di $x = c$ dengan $-\infty < f'_-(c) < \infty$ dan $-\infty < f'_+(c) < \infty$, bilangan $L > 0$ yang didefinisikan

$$L = \frac{1}{\cos^{-1}\left(\frac{-1 - f'_-(c)f'_+(c)}{\sqrt{1 + (f'_-(c))^2}\sqrt{1 + (f'_+(c))^2}}\right)}$$

disebut **kelancipan** atau **ketajaman** fungsi lancip f di $x = c$.

Sebagai contoh, fungsi f dan g yang didefinisikan pada Contoh 4, mempunyai kelancipan di $x = 0$ masing-masing L_1 dan L_2 dengan

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{1}{\cos^{-1}\left(\frac{-1 - f'_-(0)f'_+(0)}{\sqrt{1 + (f'_-(0))^2}\sqrt{1 + (f'_+(0))^2}}\right)} \\ &= \frac{1}{\cos^{-1}\left(\frac{-1 - (-1)(1)}{\sqrt{1 + (-1)^2}\sqrt{1 + (1)^2}}\right)} \\ &= \frac{1}{\cos^{-1}(0)} = \frac{1}{\pi/2} = \frac{2}{\pi}, \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} L_2 &= \frac{1}{\cos^{-1}\left(\frac{-1 - g'_-(0)g'_+(0)}{\sqrt{1 + (g'_-(0))^2}\sqrt{1 + (g'_+(0))^2}}\right)} \\ &= \frac{1}{\cos^{-1}\left(\frac{-1 - (1)(0)}{\sqrt{1 + (1)^2}\sqrt{1 + (0)^2}}\right)} \\ &= \frac{1}{\cos^{-1}(-1/\sqrt{2})} = \frac{1}{3\pi/4} = \frac{4}{3\pi}. \end{aligned}$$

Jika f dan g keduanya fungsi lancip di $x = c$, fungsi f dikatakan **lebih lancip** dari fungsi g di $x = c$ jika kelancipan f di $x = c$ lebih besar dari kelancipan g di $x = c$. Seperti fungsi f dan g yang diberikan pada Contoh 4, fungsi f lebih lancip dari fungsi g di $x = 0$.

4. KESIMPULAN

Dari hasil penelitian dan pembahasan, diperoleh beberapa kesimpulan berkenaan pengertian dan karakteristik fungsi lancip.

1. Fungsi f dikatakan lancip ke atas di $x = c$ jika derivatif kiri dikurangi derivatif kanan positif, dikatakan lancip ke bawah di $x = c$ jika derivatif kiri dikurangi derivatif kanan negatif, dan dikatakan lancip di $x = c$ jika selisih derivatif kiri dan derivatif kanan tidak nol.
2. Jika f dan g keduanya fungsi lancip ke atas (lancip ke bawah) di $x = c$, maka
 - (i). a. Untuk $\alpha > 0$, fungsi αf lancip ke atas (lancip ke bawah) di $x = c$,
 - b. Untuk $\alpha < 0$, fungsi αf lancip ke bawah (ke atas) di $x = c$,
 - (ii) fungsi $f + g$ lancip ke atas (ke bawah) di $x = c$.
3. Kelancipan atau ketajaman fungsi lancip f di $x = c$ didasarkan pada besaran sudut yang dibentuk dari derivatif kiri dan derivatif kanan, semakin kecil besar sudut maka makin besar kelancipannya.

5. UCAPAN TERIMAKASIH

Penulis mengucapkan terima kasih kepada Keris-Dimas GFracMa (Kelompok Riset dan Pengabdian Masyarakat Computer Aided Geometric Design, Fractal & Math Analysis) Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Jember atas bantuan pendanaan di Seminar Nasional Integrasi Matematika dan Nilai-nilai Islami tahun 2024.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Boman, E., & Rogers, R. (2014). *Real Analysis*. Libretexts
- [2] Bartle, R.G., & Sherbert, D.R. (2011). *Introduction to Real Analysis* (4th ed.). New York: John Wiley & Sons, Inc.

- [3] Jarnicki, M., & Pflug, P. (2015). *Continuous Nowhere Differentiable Functions The Monsters of Analysis*. Springer
- [4] Beanland, K., Roberts, J.W., & Stevenson, C. (2009). Modifications of Thomae's Function and Differentiability. *The American Mathematical Monthly*, 116(6), 531-535
- [5] Boman, E., & Rogers, R. (2023). *Differential Calculus: From Practice to Theory*. Milne Open Textbooks
- [6] Hass, J. R., Heil, C. E., Weir, M. D., & Bogacki, P. (2023). *Thomas' Calculus* (15th ed.). Pearson.
- [7] McMullen, C. (2018). *Essential Calculus Skills Practice Workbook with Full Solutions*. Zishka Publishing.

Penerapan APE Matematika Terapan Produksi Industri Mikro untuk Meningkatkan Daya Abstraksi Mahasiswa Politeknik Negeri Bandung

Mutia Lina Dewi¹, Arif Rahman Hakim², Kharisma Nur Cahyani³

^{1,3}Jurusan Teknik Sipil, Politeknik Negeri Malang

²Jurusan Teknik Kimia, Politeknik Negeri Malang

mulinde13@gmail.com, arif.rahman@polinema.ac.id, kharismanurcahyono@gmail.com

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima: 14 November 2024

Direvisi: 7 Februari 2025

Diterbitkan: 10 Februari 2025

Kata Kunci:

Alat Peraga
Inovokasi
Pembelajaran

ABSTRAK

Banyak mahasiswa politeknik mempunyai masalah dalam matematika, tidak hanya mahasiswa Politeknik Negeri Malang, tetapi juga mahasiswa jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Bandung. Oleh karena itu, dosen matematika perlu mencari solusi dengan berbagai strategi mengajar matematika yang menarik. Salah satunya adalah pembelajaran matematika dengan menggunakan Alat Peraga Edukatif (APE). Pada program Inovokasi ini tim pelaksana akan menerapkan APE Matematika Terapan dan memberi bantuan alat peraga yang telah memiliki Hak Cipta (2021) dari Kementerian Hukum dan HAM (Sertifikat No. ECO00202132319) di Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Bandung. Tujuan penerapan APE Matematika adalah meningkatkan daya abstraksi mahasiswa. Pada kegiatan program Inovokasi Diksi ini pelaksana mengajar materi Geometri di kelas 1A-KS Teknik Sipil Politeknik Negeri Bandung dengan menggunakan APE Matematika Terapan. Hasil pelaksanaan menunjukkan mahasiswa senang belajar matematika dengan menggunakan alat peraga dan daya abstraksi meningkat dengan skor rata-rata pretes = 31, postes = 80, dan skor harapan Angket skala Linkert = 31,5.

Copyright © 20XX SIMANIS.

All rights reserved.

Korespondensi:

Mutia Lina Dewi ,
Jurusan Teknik Sipil,
Politeknik Negeri Malang,

1. PENDAHULUAN

Matematika seringkali menjadi momok yang menakutkan, tidak hanya siswa sekolah dasar, tetapi juga siswa sekolah menengah, bahkan mahasiswa politeknik. Ironisnya, sebelum memulai pembelajaran matematika, mahasiswa sudah beranggapan matematika itu pasti sulit, mahasiswa tidak siap belajar matematika di politeknik. Salah satu strategi untuk membantu kesulitan mahasiswa politeknik adalah pembelajaran dengan menggunakan Alat Peraga Edukatif (APE) Matematika. Penggunaan alat peraga di Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Malang telah berlangsung sejak tahun 2012 ketika ada Hibah *Teaching Aids*.

APE Matematika Terapan yang akan diimplementasikan dan dihibahkan kepada Politeknik Negeri Bandung adalah salah satu program Inovokasi Diksi. Alat peraga ini produksi mitra Jagalan 1 Malang. Mitra adalah industri mikro yang memproduksi aneka bahan Akrilik, khususnya Neon Huruf Timbul. Berdiri sejak Tahun 1991 tetapi baru mengajukan Surat Induk Berusaha (SIB) awal 2024, kini sudah terbit pada Tanggal 8 Maret 2024 dengan Nomor SIB 0803240070181[1]. Kegiatan program Inovokasi ini mengacu pada Renstra Politeknik Negeri Malang, yaitu Pengembangan Infrastruktur Riset dan Proses Belajar Mengajar dan sejalan dengan Pencapaian Indikator Kinerja Utama (IKU), yaitu IKU 2 (mahasiswa mendapat pengalaman di luar kampus), IKU 3 (dosen berkegiatan di luar kampus), IKU 5 (hasil kerja dosen digunakan masyarakat), dan IKU 7 (kelas yang kolaboratif dan partisipatif), sedangkan Tingkat Kesiapterapan Teknologi (TKT) adalah Tingkat 7. Hal ini dikarenakan alat peraga edukatif hasil penelitian telah diberikan di Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Malang dan siswa SMKN 6 Malang (penelitian tahun 2023). Manfaat yang diharapkan pada kegiatan Inovokasi ini adalah mahasiswa senang belajar matematika, dosen mudah mengajar matematika, dan pendapatan mitra bertambah. Gambar 1 berikut menunjukkan ketua pelaksana bersama mitra bapak Slamet Imam Hanfi pemilik Jagalan 1 Malang.



Gambar 1. Ketua pelaksana berdiskusi dengan mitra Jagalan 1

2. METODE PENELITIAN

Pada kegiatan Inovokasi ini, selain implementasi dan memberikan bantuan Alat Peraga Edukatif kepada Politeknik Negeri Bandung, juga melaksanakan penelitian yang berkaitan dengan penggunaan alat peraga.

1. Pendekatan dan Jenis Penelitian

Penelitian menggunakan pendekatan kualitatif, karena kajian tentang kesulitan Matematika Terapan mahasiswa politeknik.. Hal ini berarti, pembelajaran dengan menggunakan APE Matematika Terapan berlangsung secara alami sesuai dengan apa yang ada di lapangan, dan lebih mementingkan proses daripada hasil. Jenis penelitian adalah penelitian tindakan partisipasi, karena pelaksana berpartisipasi aktif dan terlibat langsung mulai dari awal perencanaan sampai dengan penyusunan laporan akhir. Selain itu, penelitian ini dilakukan karena adanya permasalahan, yaitu perlunya keseragaman kurikulum matematika di politeknik..

2. Data dan Sumber Data

Perolehan data dalam kegiatan Inovokasi ini adalah hasil pretes, postes, angket, dan pengamatan. Sumber data mahasiswa Semester Satu kelas 1A-KS Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Bandung yang terdiri dari 31 mahasiswa.

3. Analisis Data

Analisis data menggunakan teknik analisis data kualitatif yang dikembangkan Miles dan Huberman [2], yaitu Mereduksi Data, Menyajikan Data, dan Menarik Kesimpulan. Untuk melihat peningkatan daya abstraksi dari hasil pretes dan postes dengan menggunakan penghitungan statistik, yaitu skor rata-rata dan standar deviasi. Hasil angket dengan skala Likert sebagai berikut.

$$\text{Skor Harapan} = \frac{\text{Skor Tertinggi} - \text{Skor Terendah}}{2}$$

Jika skor rata-rata lebih besar dari skor harapan maka dapat diambil kesimpulan pembelajaran matematika dengan alat peraga berlangsung dengan baik. Perolehan skor dari konversi pilihan pada angket, sebagai berikut Sangat Setuju = 4, Setuju = 3, Kurang Setuju = 2, dan Tidak Setuju = 1.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

3.1 Hasil Penelitian

Penelitian diawali dengan pembelajaran Geometri topik Bidang Datar dan Bangun Ruang di Kelas 1A-KS yang terdiri dari 31 mahasiswa Semester 1 Tahun Perkuliahan 2024/2025 Program Studi D3 Konstruksi Bangunan Sipil Politeknik Negeri Bandung (30 September 2024). Instrumen data diperoleh dari hasil pretes, postes, angket, dan diskusi dengan dosen matematika Politeknik Negeri Bandung. Gambar 2 berikut menunjukkan pelaksanaan penggunaan APE Matematika di kelas 1A-KS Politeknik Negeri Bandung.



Gambar 2. Implementasi APE Matematika Terapan di Politeknik Negeri Bandung

Temuan penelitian diuraikan sebagai berikut.

3.1.1 Skor Pretes dan Postes

Skor pretes dan postes mahasiswa kelas 1A-KS ditunjukkan Tabel 1. Berikut.

Tabel 1. Skor pretes dan postes mahasiswa kelas 1A-KS

No.	Nama	Pretes	Postes
1	Louis Kristianto	30	100
2	Rafi Ikmaludin	30	100
3	Pasa Nitijasa	30	60
4	Hanif Zaidan	30	80
5	Fajri Hendra	30	70
6	Moch. Syahril	30	70
7	Kai Hufia Irfan	30	60
8	Reznandya Maharani	30	60
9	Rista Formaika	30	100
10	M. Ausath Hilmi	30	100
11	Ghibran Ghiyan	30	100
12	Danar Jackadiaksa	30	100
13	Nafisa Azkia	30	60
14	Naomi Delfia	30	90
15	Fahri Ramdhani	30	80
16	Aurel Caesar	30	100
17	Addni Isyana	30	85
18	Kayla Izmie	40	100
19	Kayla Diva	30	50
20	Jonathan Putra	30	50
21	Dita Putri	40	100
22	Umar Abdurachman	30	100
23	Much. Malki	30	100
24	Adib Al Hafidzi	30	50

25	A. Alfino Winora	30	50
26	Novi Fitriani	30	90
27	Mario Armando	30	50
28	Dzakwan Ikbar	40	100
29	Rangga M. Farizi	30	100
30	Khalisah Mahiroh	30	85
31	Rahma Amalia	30	50
Rata-Rata		31	80

3.1.2 Hasil Angket

Ada sepuluh pernyataan yang berkaitan dengan penggunaan APE Matematika dalam pembelajaran matematika. Mahasiswa memilih satu dari empat item pilihan, yaitu sangat setuju, setuju, kurang setuju, dan tidak setuju. Sepuluh pernyataan pada angket adalah sebagai berikut.

1. Saya senang pembelajaran matematika dengan menggunakan alat peraga.
2. Saya termotivasi belajar matematika dengan alat peraga.
3. Saya dapat menyelesaikan soal matematika dengan alat peraga.
4. Alat peraga dapat meningkatkan kemampuan matematika.
5. Saya lebih memahami materi matematika dengan bantuan alat peraga.
6. Alat peraga yang dijelaskan dosen Polinema menarik dan mudah dipahami.
7. Semua topik dalam matematika sebaiknya menggunakan alat peraga.
8. Saya suka matematika.
9. Matematika adalah materi paling sulit
10. Matematika adalah materi abstrak.

Hasil angket ditunjukkan pada Tabel 2 berikut.

Tabel 2. Skor Angket Mahasiswa Kelas 1A-KS

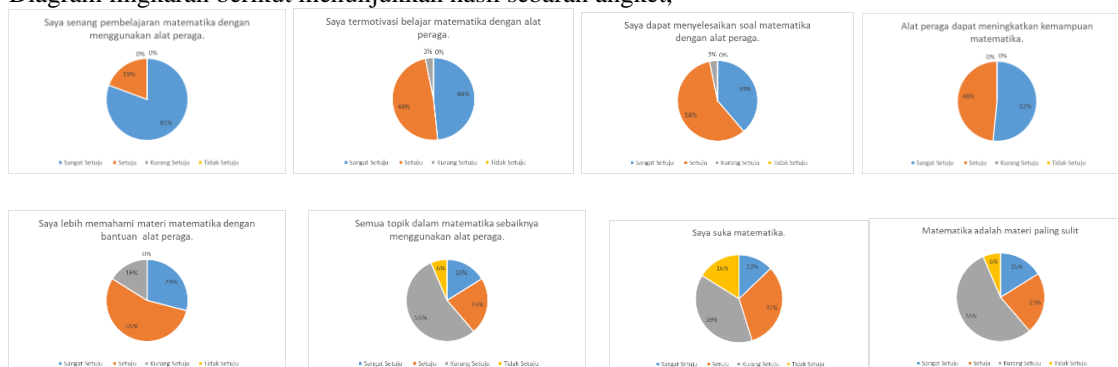
Nomor Urut	Angket
1	37
2	36
3	36
4	36
5	35
6	35
7	35
8	34
9	34
10	34
11	34
12	34
13	34
14	33
15	33
16	33
17	33
18	32
19	32
20	31
21	31
22	30

23	30
24	30
25	30
26	29
27	29
28	29
29	29
30	29
31	26

Sebaran angket ditunjukkan pada Tabel 3 berikut.

No.	Pernyataan	Sangat Setuju	Setuju	Kurang Setuju	Tidak Setuju
1.	Saya senang pembelajaran matematika dengan menggunakan alat peraga.	25	6		
2.	Saya termotivasi belajar matematika dengan alat peraga.	15	15	1	
3.	Saya dapat menyelesaikan soal matematika dengan alat peraga.	12	18	1	
4.	Alat peraga dapat meningkatkan kemampuan matematika.	18	13		
5.	Saya lebih memahami materi matematika dengan bantuan alat peraga.	18	13		
6.	Alat peraga yang dijelaskan dosen Polinema menarik dan mudah dipahami.	16	15		
7.	Semua topik dalam matematika sebaiknya menggunakan alat peraga.	9	17	5	
8.	Saya suka matematika.	4	10	12	5
9.	Matematika adalah materi paling sulit	5	7	17	2
10.	Matematika adalah materi abstrak.	1	19	9	2

Diagram lingkaran berikut menunjukkan hasil sebaran angket,



3.1.3 Hasil Diskusi

Sebagai bahan pengembangan kurikulum matematika di politeknik, pelaksana berdiskusi dengan dosen matematika, sejour dan dosen Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Malang. Hasil diskusi diuraikan sebagai berikut.

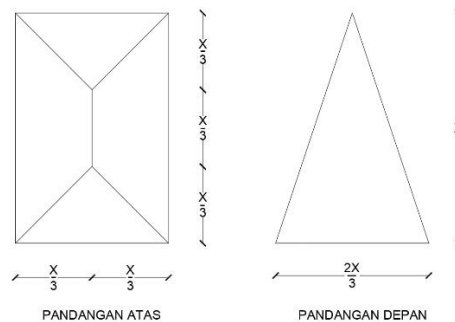
1. Pimpinan dan dosen Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Bandung memberikan apresiasi positif dengan adanya implementasi APE Matematika Terapan
2. Pembelajaran matematika di Politeknik Negeri Bandung belum menggunakan alat peraga
3. Banyak mahasiswa kesulitan dalam penyelesaian matematika

4. Matematika diberikan di semester 1 alokasi waktu 4x50 menit, 2 SKS dengan topik Sistem Bilangan Real, Matriks, Determinan, Grafik dan Fungsi, Persamaan, Trigonometri, Geometri, Turunan, dan Integral.
5. Hibah APE Matematika Terapan sangat bermanfaat dan akan digunakan untuk pembelajaran Geometri.

3.2 Pembahasan

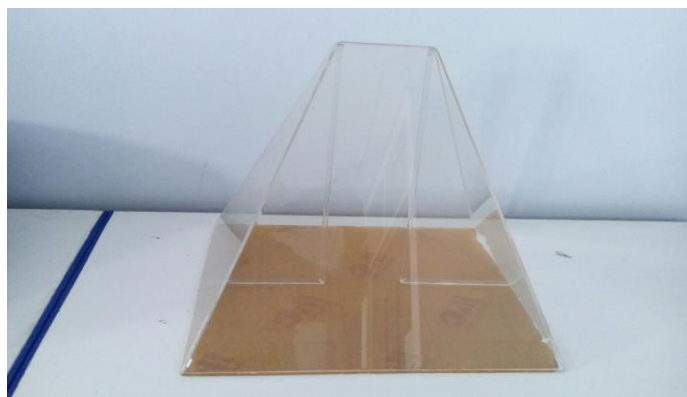
Soal Geometri yang diberikan pada mahasiswa kelas 1A-KS Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Bandung ditunjukkan Gambar 3 sebagai berikut.

Gambar berikut menunjukkan Pandangan Atas dan Pandangan Depan sebuah Konstruksi “Tenda”. Jika $x = 3,5$ m, hitunglah luas Atap Tenda dan Isi Ruang Tenda.



Gambar 3. Tampak Atas dan Depan Konstruksi Tenda

Masalah utama pada soal ini adalah menentukan Tinggi Segitiga dan Tinggi Trapesium, banyak mahasiswa mempunyai anggapan Tinggi Segitiga dan Trapesium tampak pada soal (Gambar 3). Padahal Gambar 3 ini Tampak Atas dan Depan, sehingga bidang Segitiga dan Trapesiumnya miring, diperlukan gambar atau bentuk Dimensi Tiga. Dengan menggunakan alat peraga berbahan Aklirik dapat dilihat dengan nyata Tinggi yang sebenarnya dari bidang Segitiga dan Trapesium dari Atap Tenda. Juga akan lebih mudah melihat bentuk volume atau isi ruangan konstruksi Tenda, Mitra Jagalan 1 mampu memproduksi alat peraga yang dibutuhkan untuk menyelesaikan masalah Geometri. Gambar 4 menunjukkan APE Matematika Terapan produksi mitra.



Gambar 4. APE Matematika Produksi Mitra

Berdasarkan Tabel 1 dapat dilihat skor rata-rata Pretes = 31 dan Postes = 80, ada perbedaan signifikan antara skor tanpa alat peraga (prettes) dan skor dengan menggunakan alat peraga (postes).

Pembahasan Angket menggunakan skala Likert dengan konversi skor, pilihan Sangat Setuju = 4, Setuju = 3, Kurang Setuju = 2, dan Tidak Setuju = 1. Berdasarkan Tabel 2 diperoleh hasil sebagai berikut.

Skor terendah = 26

Skor tertinggi = 37

Skor Rata-rata = 32

Skor Harapan = $\frac{1}{2}(26 + 37) = 31,5$

Diperoleh skor rata-rata lebih besar dari skor harapan.

Dengan demikian dapat diambil kesimpulan bahwa pembelajaran matematika dengan menggunakan alat peraga berlangsung dengan cukup baik.

Hasil penelitian menunjukkan dengan bantuan alat peraga dapat meningkatkan kemampuan mahasiswa Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Malang dan mahasiswa senang belajar Matematika [3]. Hasil penelitian Widjajanti [4] menunjukkan mahasiswa lemah daya abstraksi, rendah Matematika Dasar, dan kurang terampil dalam komputasi. Alat peraga digunakan sebagai salah satu strategi mengajar yang membantu mahasiswa membayangkan permasalahan Geometri. Menurut Infokemdikbud[5]; menyebutkan perbedaan model, strategi, dan metode adalah model pembelajaran merupakan bingkai atau bungkus pengaplikasian strategi, metode, dan teknik. Strategi adalah konsep rencana pembelajaran secara prosedural, sedangkan metode adalah cara yang dipergunakan mengimplementasikan rencana pembelajaran. Hasil penelitian penerapan alat peraga tahun 2018 dipublikasikan pada Jurnal Internasional IOP Conference Series (Q3): Materials Science and Engineering dengan judul Mathematics Teaching Aids to improve the students abstraction on Geometry in Civil Engineering of Politeknik Negeri Malang [6] dan proseding seminar Internasional The 7th Annual Basic Science International Conference (tahun 2017) dengan judul Problem Based Learning Application in Geometry to Improve the Abstraction Skill of Student at Civil Engineering of Politeknik Negeri Malang[7]. Tahun 2021 alat peraga Matematika Terapan memperoleh Hak Cipta dari Kementerian Hukum dan HAM dengan Sertifikat No. ECO00202132319. Tahun 2023 bekerja sama dengan mitra Jagalan 1 mengimplementasikan alat peraga Matematika Terapan di SMKN 6 Malang. Hasil penelitian menunjukkan “Pembelajaran matematika dengan alat peraga memudahkan guru menyampaikan materi dan siswa senang belajar matematika.”

4. KESIMPULAN

Kesimpulan kegiatan program Inovokasi diuraikan sebagai berikut.

Hasil sebaran angket pada Tabel 3 diuraikan sebagai berikut.

1. Mahasiswa senang pembelajaran matematika dengan menggunakan alat peraga
2. Mahasiswa termotivasi belajar matematika dengan alat peraga
3. Alat peraga dapat meningkatkan kemampuan matematika
4. Pembelajaran matematika dengan menggunakan APE berjalan cukup baik.

5. UCAPAN TERIMAKASIH

Kami sampaikan terima kasih kepada instansi yang telah mendukung berlangsungnya penelitian ini, yaitu:

1. Kemenristek Direktorat Jenderal Pendidikan Vokasi yang telah mendanai penelitian Program Inovokasi Tahun 2024 dengan SK Nomor: 1272/D4/AL.04/2024.
2. P3M Politeknik Negeri Malang yang telah memberikan kesempatan dan fasilitas yang berkaitan dengan program Inovokasi 2024.
3. Pimpinan Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Bandung yang telah memberikan ijin pelaksanaan implementasi APE Matematika Terapan di kelas 1A-KS.
4. Pimpinan Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Malang yang telah memberikan ijin pelaksanaan implementasi APE Matematika Terapan di Enam Politeknik Perintis.
5. Mitra Jagalan 1 Malang yang mampu memproduksi APE Matematika Terapan berbahan Aklirik.

DAFTAR PUSTAKA (10 PT)

- [1] <https://drive.google.com/file/d/1T4xYrvIDn83SYJJSFpeKZ8uBr7xhSfMU/view?usp=sharing>
- [2] Mujianto, 2016. Penggunaan Fitur Lingual dalam Wacana Agararia di Media Massa. Disertasi: Universitas Negeri Malang
- [3] Dewi, ML. 2012. *Penggunaan Alat Peraga pada Pembelajaran Matematika untuk Meningkatkan Daya Abtraksi Mahasiswa Jurusan Teknik Sipil Politeknik Negeri Malang*. Penelitian DIPA Polinema.
- [4] Widjajanti, K. 2010. *Sesi Bantuan untuk Meningkatkan Kemampuan Matematika Mahasiswa Teknik Elektro*. Tesis tidak dipublikasikan. Universitas Negeri Malang.

- [5] Infokemdikbud. 2020. *Perbedaan Model, Metode, Strategi, Pendekatan dan Teknik Pembelajaran*. <http://www.infokemdikbud.online/2020/01/perbedaan-model-metode-strategi.html>
- [6] https://www.researchgate.net/publication/329401597_Mathematics_teaching_Aids_to_improve_the_students_abstraction_on_Geometry_in_Civil_Engineering_of_State_Polytechnic_Malang
- [7] https://www.researchgate.net/publication/320075469_Problem_Based_Learning_Application_in_Geometry_to_Improve_the_Abstraction_Skill_of_Student_at_Civil_Engineering
- [8] https://drive.google.com/file/d/19u63HuL4_Jj9HDBBLN8W9BOTHz9MNdVD/view?usp=sharing

Semiring *Clear* dan Sifat-Sifatnya

Yassin Dwi Cahyo¹, Nikken Prima Puspita²

^{1,2}Departemen Matematika, Universitas Diponegoro, Semarang

yassindwicahyo@gmail.com, nikkenprima@lecturer.undip.ac.id

Info Artikel

Riwayat Artikel:

Diterima : 17 November 2024

Direvisi : 10 Januari 2025

Diterbitkan: 12 Februari 2025

Kata Kunci:

Semiring
Semiring *Clear*
Unit
Unit Reguler

ABSTRAK

Semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ dikatakan *clear* jika untuk setiap elemen tak nol $s \in \mathcal{S}$, s dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu elemen unit dan suatu elemen unit reguler. Jika diberikan keluarga semiring *clear* $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, maka hasil kali kartesian dari keluarga semiring *clear* $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, juga merupakan semiring *clear* terhadap operasi penjumlahan dan perkalian *pointwise*. Sifat yang lain adalah setiap homomorfisma semiring g dari \mathcal{S}_1 ke \mathcal{S}_2 di mana \mathcal{S}_1 semiring *clear*, maka *image* dari g juga merupakan semiring *clear*. Pada artikel ini juga diberikan syarat perlu dan syarat cukup suatu elemen pada semiring dikatakan *clear*.

Copyright © 20XX SIMANIS.
All rights reserved.

Korespondensi:

Yassin Dwi Cahyo,
Departemen Matematika, Fakultas Sains dan Matematika, Universitas Diponegoro,
Jl. Prof. Jacub Rais, Tembalang, Semarang.
yassindwicahyo@gmail.com

1. PENDAHULUAN

Himpunan tak kosong \mathcal{R} yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan “+” dan operasi biner perkalian “ \cdot ”, yang dinotasikan dengan $(\mathcal{R}, +, \cdot)$, disebut ring jika $(\mathcal{R}, +)$ adalah grup komutatif, (\mathcal{R}, \cdot) adalah semigrup, serta operasi “+” dan “ \cdot ” memenuhi hukum distributif kiri dan kanan pada \mathcal{R} [1]. Pada tahun 1934, H.S. Vandiver menemukan struktur aljabar semiring [2]. Semiring merupakan bentuk generalisasi dari ring. Himpunan tak kosong \mathcal{S} yang dilengkapi dengan operasi biner penjumlahan “+” dan operasi biner perkalian “ \cdot ”, yang dinotasikan dengan $(\mathcal{S}, +, \cdot)$, disebut semiring jika $(\mathcal{S}, +)$ adalah monoid komutatif, struktur (\mathcal{S}, \cdot) adalah monoid, operasi “+” dan “ \cdot ” memenuhi hukum distributif kiri dan kanan pada \mathcal{S} , serta berlaku hukum penyerapan, yaitu $0 \cdot s = s \cdot 0 = 0$ untuk setiap $s \in \mathcal{S}$ [3].

Pada tahun 1977, Nicholson [4] memperkenalkan salah satu jenis ring khusus, yaitu ring bersih. Ring $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ disebut ring bersih jika setiap elemen di \mathcal{R} dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di \mathcal{R} . Kemudian, pada tahun 2021, Zabavsky [5] mendefinisikan jenis ring khusus lainnya, yaitu ring *clear*. Ring $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ disebut ring *clear* jika setiap elemen di \mathcal{R} dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu elemen unit reguler dan suatu elemen unit di \mathcal{R} . Selanjutnya, pada tahun 2023, Kar dan Das [6] memperumum ring bersih menjadi semiring bersih. Semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ disebut semiring bersih jika setiap elemen tak nol di \mathcal{S} dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di \mathcal{S} .

Pada artikel ini, dipaparkan mengenai perumuman ring *clear*, yaitu semiring *clear* dan beberapa sifat-sifatnya.

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini adalah kajian pustaka mengenai ring *clear* dan semiring bersih dari berbagai buku dan artikel ilmiah.

Berikut beberapa konsep dasar yang berkaitan dengan topik yang dibahas pada artikel ini. Namun, sebelum didefinisikan mengenai ring *clear*, terlebih dahulu diberikan definisi elemen unit dan elemet unit reguler pada suatu ring.

Definisi 1 [1] Diberikan ring $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ dengan elemen satuan $1_{\mathcal{R}}$. Elemen $u \in \mathcal{R}$ disebut elemen unit jika terdapat $s \in \mathcal{R}$ sedemikian sehingga $us = su = 1_{\mathcal{R}}$.

Selanjutnya, himpunan semua elemen unit pada \mathcal{R} dinotasikan dengan $U(\mathcal{R})$.

Definisi 2 [7] Diberikan ring $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ dengan elemen satuan $1_{\mathcal{R}}$. Elemen $v \in \mathcal{R}$ disebut elemen unit reguler jika terdapat $u \in U(\mathcal{R})$ sedemikian sehingga $v = uvv$.

Selanjutnya, himpunan semua elemen unit reguler pada \mathcal{R} dinotasikan dengan $U_{reg}(\mathcal{R})$.

Terdapat jenis ring khusus yang setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu elemen unit dan suatu elemen unit reguler, yaitu ring *clear*.

Definisi 3 [5] Diberikan ring $(\mathcal{R}, +, \cdot)$ dengan elemen satuan $1_{\mathcal{R}}$. Ring \mathcal{R} dikatakan *clear* jika untuk setiap elemen $r \in \mathcal{R}$ dapat dinyatakan sebagai $r = u + v$, di mana $u \in U(\mathcal{R})$ dan $v \in U_{reg}(\mathcal{R})$.

Proposisi 1 [5] Setiap *image* homomorfisma dari ring *clear* adalah *clear*.

Proposisi 2 [5] Hasil kali kartesian dari ring *clear* adalah *clear*.

Lemma 1 [5] Elemen $r \in \mathcal{R}$ *clear* jika dan hanya jika terdapat elemen unit u sedemikian sehingga ur dan ru adalah elemen bersih.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, dijelaskan hasil-hasil penelitian dan diskusi yang menyeluruh terkait bidang semiring *clear*.

3.1. Semiring *Clear*

Sebelum didefinisikan mengenai semiring *clear*, terlebih dahulu diberikan definisi elemen-elemen khusus pada suatu semiring, di antaranya elemen idempoten, elemen unit, dan elemet unit reguler pada suatu ring.

Definisi 4. [6] Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$. Elemen $i \in \mathcal{S}$ disebut elemen idempoten jika $i = i^2$.

Selanjutnya, himpunan semua elemen idempoten pada \mathcal{S} dinotasikan dengan $Id(\mathcal{S})$.

Contoh 1

1. Diberikan semiring $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$. Elemen-elemen idempoten pada \mathbb{Z}_0^+ , yaitu 0 dan 1, sebab $0 = 0^2$ dan $1 = 1^2$.
2. Elemen-elemen idempoten pada semiring $(\mathbb{Z}_6, +_6, \cdot_6)$, yaitu $\bar{0}, \bar{1}, \bar{3}, \bar{4}$, sebab $\bar{0}^2 = \bar{0}, \bar{1}^2 = \bar{1}, \bar{3}^2 = \bar{9} = \bar{3}$, dan $\bar{4}^2 = \bar{16} = \bar{4}$.

Definisi 5. [3] Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$. Elemen $u \in \mathcal{S}$ disebut elemen unit jika terdapat $s \in \mathcal{R}$ sedemikian sehingga $us = su = 1_{\mathcal{S}}$.

Selanjutnya, himpunan semua elemen unit pada \mathcal{S} dinotasikan dengan $U(\mathcal{S})$.

Contoh 2

1. Diberikan semiring $(\mathbb{Z}_0^+, +, \cdot)$. Elemen unit pada \mathbb{Z}_0^+ hanyalah 1, sebab $1 \cdot 1 = 1$.
2. Diberikan semiring $(\mathbb{R}_{\max}, \oplus, \otimes)$. Elemen unit pada \mathbb{R}_{\max} adalah semua elemen $r \in \mathbb{R}_{\max} \setminus \{-\infty\}$, sebab untuk setiap $r \in \mathbb{R}_{\max} \setminus \{-\infty\}$ dapat ditemukan $-r \in \mathbb{R}_{\max} \setminus \{-\infty\}$ sedemikian sehingga $r \otimes (-r) = 0 = -r \otimes r$.
3. Setiap elemen tak nol pada semi-*field* $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ adalah unit.

Definisi 6. [8] Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$. Elemen $v \in \mathcal{S}$ disebut elemen unit reguler jika terdapat $u \in U(\mathcal{S})$ sedemikian sehingga $v = vuv$.

Selanjutnya, himpunan semua elemen unit reguler pada \mathcal{S} dinotasikan dengan $U_{reg}(\mathcal{S})$.

Contoh 3

1. Setiap semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$ dengan elemen satuan $1_{\mathcal{S}}$ selalu mempunyai elemen unit reguler trivial, yaitu $U_{reg}(\mathcal{S}) = \{0_{\mathcal{S}}, 1_{\mathcal{S}}\}$, sebab $0_{\mathcal{S}} = 0_{\mathcal{S}} \cdot u \cdot 0_{\mathcal{S}}$ dan $1_{\mathcal{S}} = 1_{\mathcal{S}} \cdot 1_{\mathcal{S}} \cdot 1_{\mathcal{S}}$ untuk suatu $u, 1_{\mathcal{S}} \in U(\mathcal{S})$.
2. Setiap elemen idempoten pada \mathcal{S} merupakan elemen unit reguler pada \mathcal{S} , sebab untuk setiap $i \in Id(\mathcal{S})$, i dapat dinyatakan sebagai $i \cdot 1_{\mathcal{S}} \cdot i = i^2 = i$ untuk suatu $1_{\mathcal{S}} \in U(\mathcal{S})$.
3. Setiap elemen unit pada \mathcal{S} merupakan elemen unit reguler pada \mathcal{S} , sebab untuk setiap $p \in U(\mathcal{S})$ dapat ditemukan $q \in U(\mathcal{S})$ sedemikian sehingga $p \cdot q = 1_{\mathcal{S}}$ dan $p \cdot q \cdot p = 1_{\mathcal{S}} \cdot p = p$.

Terdapat jenis semiring khusus yang setiap elemennya dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu elemen unit dan suatu elemen unit reguler, yaitu semiring *clear*.

Definisi 7. Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$. Semiring \mathcal{S} dikatakan *clear* jika untuk setiap elemen tak nol $r \in \mathcal{S}$ dapat dinyatakan sebagai $r = u + v$, di mana $u \in U(\mathcal{S})$ dan $v \in U_{reg}(\mathcal{S})$.

Contoh 4. Semiring $(\mathbb{Q}_0^+, +, \cdot)$ adalah semiring *clear* sebab untuk setiap elemen tak nol $q \in \mathbb{Q}_0^+$ dapat dinyatakan sebagai $q = 0 + q$ dengan $0 \in U_{reg}(\mathbb{Q}_0^+)$ dan $q \in U(\mathbb{Q}_0^+)$.

Remark 1.

1. Semiring *clear* merupakan perumuman dari ring *clear*.
2. Setiap semi-field merupakan semiring *clear*.
3. Subsemiring dari semiring *clear*, belum tentu *clear*.

3.2. Sifat-Sifat pada Semiring Clear

Lemma 2. Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$. Elemen $s \in U_{reg}(\mathcal{S})$ jika dan hanya jika s dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di \mathcal{S} .

Bukti:

Diketahui semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$.

\Rightarrow Diketahui $s \in U_{reg}(\mathcal{S})$. Ditunjukkan bahwa s dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di \mathcal{S} .

Diambil sebarang $s \in U_{reg}(\mathcal{S})$, artinya $s = sas$ dengan $a \in U(\mathcal{S})$. Pandang $e = sa$, diperoleh

$$e^2 = (sa)(sa) = (sas)a = sa = e.$$

Akibatnya, $e = sa \in Id(\mathcal{S})$. Selanjutnya, pandang $u = a^{-1} \in U(\mathcal{S})$, diperoleh

$$s = s(aa^{-1}) = (sa)a^{-1} = eu.$$

Terbukti bahwa setiap elemen unit reguler di \mathcal{S} dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di \mathcal{S} .

\Leftarrow Diketahui $s \in \mathcal{S}$ dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di \mathcal{S} . Ditunjukkan bahwa $s \in U_{reg}(\mathcal{S})$.

Diambil sebarang $s = eu \in \mathcal{S}$ dengan $e \in Id(\mathcal{S})$ dan $u \in U(\mathcal{S})$. Ditunjukkan ada $v \in U(\mathcal{S})$ sedemikian sehingga $s = svs$. Pandang $v = u^{-1}$. Diperhatikan bahwa:

$$svs = su^{-1}s = (eu)u^{-1}(eu) = eu = s.$$

Terbukti bahwa $s \in U_{reg}(\mathcal{S})$.

Jadi, terbukti bahwa elemen $s \in U_{reg}(\mathcal{S})$ jika dan hanya jika s dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di \mathcal{S} . ■

Proposisi 3 Diberikan semiring $(\mathcal{S}_1, +_1, \cdot_1)$ dan $(\mathcal{S}_2, +_2, \cdot_2)$, serta homomorfisma semiring $\delta: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$. Jika $(\mathcal{S}_1, +_1, \cdot_1)$ merupakan semiring *clear*, maka *image* dari δ juga merupakan semiring *clear*.

Bukti:

Diberikan semiring *clear* $(\mathcal{S}_1, +_1, \cdot_1)$ dan semiring $(\mathcal{S}_2, +_2, \cdot_2)$, serta homomorfisma semiring $\delta: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$. Akan dibuktikan bahwa $\text{Im}(\delta)$ adalah semiring *clear*. Diambil sebarang $s \in \text{Im}(\delta) \setminus \{0_{\mathcal{S}_2}\}$, artinya s dapat dinyatakan sebagai $s = \delta(a)$, untuk suatu $a \in \mathcal{S}_1 \setminus \{0_{\mathcal{S}_1}\}$. Oleh karena \mathcal{S}_1 adalah semiring *clear*, ini berarti $a = u + v$, di mana $u \in U(\mathcal{S}_1)$ dan $v \in U_{reg}(\mathcal{S}_1)$. Dimisalkan $v = e \cdot p$ di mana $e \in \text{Id}(\mathcal{S}_1)$ dan $p \in U(\mathcal{S}_1)$. Diperhatikan bahwa

$$\delta(a) = \delta(u + v) = \delta(u + e \cdot p) = \delta(u) + \delta(e) \cdot \delta(p).$$

Oleh karena $u, p \in U(\mathcal{S}_1)$, maka $\delta(u), \delta(p) \in U(\text{Im}(\delta))$ dan $e \in \text{Id}(\mathcal{S}_1)$, maka $\delta(e) \in \text{Id}(\text{Im}(\delta))$. Selanjutnya, berdasarkan lemma 2, diperoleh $\delta(e) \cdot \delta(p) \in U_{reg}(\text{Im}(\delta))$. Dengan kata lain, $\delta(a)$ dapat dinyatakan sebagai jumlahan dari suatu elemen unit dan suatu elemen unit reguler di \mathcal{S}_2 . Jadi, terbukti bahwa *image* homomorfisma dari suatu semiring *clear* juga merupakan semiring *clear*. ■

Proposisi 4 Diberikan keluarga semiring $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Hasil kali kartesian dari keluarga semiring *clear* $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ merupakan semiring *clear* terhadap operasi penjumlahan dan perkalian *pointwise* jika dan hanya jika setiap \mathcal{S}_i merupakan semiring *clear*.

Bukti:

Diberikan keluarga semiring $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

⇒ Diberikan semiring *clear* $\mathcal{S} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_i$. Akan dibuktikan setiap \mathcal{S}_i merupakan semiring *clear*. Dibentuk suatu fungsi

$$\begin{aligned} \delta_i: \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_i &\rightarrow \mathcal{S}_i \\ (s_1, s_2, \dots) &\mapsto s_i, \text{ untuk setiap } (s_1, s_2, \dots) \in \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_i. \end{aligned}$$

Jelas bahwa δ_i adalah epimorfisma. Berdasarkan proposisi 3, terbukti bahwa setiap \mathcal{S}_i merupakan semiring *clear*.

⇐ Diberikan semiring *clear* $\mathcal{S}_i, i \in \mathbb{N}$. Akan dibuktikan bahwa $\mathcal{S} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_i$ merupakan semiring *clear*. Diambil sebarang elemen $(s_1, s_2, \dots) \in \mathcal{S}$ di mana $s_i \neq 0_{\mathcal{S}_i}$ untuk setiap $i \in \mathbb{N}$. Oleh karena semiring *clear* $\mathcal{S}_i, i \in \mathbb{N}$, artinya untuk setiap elemen tak nol $s_i \in \mathcal{S}_i$ dapat dinyatakan sebagai $s_i = u_i + v_i$, di mana $u_i \in U(\mathcal{S}_i)$ dan $v_i \in U_{reg}(\mathcal{S}_i)$. Akibatnya,

$$(s_1, s_2, \dots) = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots) = (u_1, u_2, \dots) + (v_1, v_2, \dots).$$

Jadi, terbukti bahwa $\mathcal{S} = \prod_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{S}_i$ merupakan semiring *clear*. ■

Proposisi 5 Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$. Elemen $s \in \mathcal{S}$ *clear* jika dan hanya jika terdapat elemen unit u sedemikian sehingga us dan su adalah elemen bersih.

Bukti.

Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$.

⇒ Diketahui elemen *clear* $s \in \mathcal{S}$. Ditunjukkan bahwa terdapat $u \in U(\mathcal{S})$ sehingga us dan su adalah elemen bersih.

Oleh karena elemen *clear* $s \in \mathcal{S}$, artinya

$$s = a + b \dots (*)$$

di mana $a \in U_{reg}(\mathcal{S})$ dan $b \in U(\mathcal{S})$. Dari $a \in U_{reg}(\mathcal{S})$, artinya ada $u \in U(\mathcal{S})$ sehingga $a = aua$. Selanjutnya, dengan mengalikan u pada persamaan (*) didapatkan

$$us = u(a + b) = ua + ub,$$

serta $(ua)^2 = (ua)(ua) = u(aua) = ua$ dan $ub \in U(\mathcal{S})$. Diperoleh us adalah elemen bersih. Kemudian, dengan cara yang sama, didapatkan su juga elemen bersih.

\Leftarrow Diketahui terdapat $u \in U(\mathcal{S})$ sehingga us dan su adalah elemen bersih. Ditunjukkan bahwa $s \in \mathcal{S}$ adalah elemen *clear*.

Dari yang diketahui, terdapat $u \in U(\mathcal{S})$ sehingga us dan su adalah elemen bersih. Pandang

$$us = e + v \dots (**)$$

di mana $e \in Id(\mathcal{S})$ dan $v \in U(\mathcal{S})$. Dengan mengalikan u^{-1} pada persamaan (**) diperoleh

$$s = u^{-1}e + u^{-1}v.$$

Oleh karena $(u^{-1}e)u(u^{-1}e) = u^{-1}e$, artinya $u^{-1}e \in U_{reg}(\mathcal{S})$. Lebih lanjut, $u^{-1}e \in U_{reg}(\mathcal{S})$ dan $u^{-1}v \in U(\mathcal{S})$. Akibatnya $s \in \mathcal{S}$ adalah elemen *clear*. Bukti analog untuk su .

Jadi, terbukti bahwa elemen $s \in \mathcal{S}$ *clear* jika dan hanya jika terdapat elemen unit u sedemikian sehingga us dan su adalah elemen bersih. ■

4. KESIMPULAN

Diberikan semiring $(\mathcal{S}, +, \cdot)$. Semiring \mathcal{S} dikatakan *clear* jika untuk setiap elemen tak nol $r \in \mathcal{S}$ dapat dinyatakan sebagai $r = u + v$, di mana $u \in U(\mathcal{S})$ dan $v \in U_{reg}(\mathcal{S})$. Beberapa sifat-sifat dari semiring *clear* di antaranya adalah

1. Elemen $s \in U_{reg}(\mathcal{S})$ jika dan hanya jika s dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari suatu elemen idempoten dan suatu elemen unit di \mathcal{S} .
2. Diberikan semiring $(\mathcal{S}_1, +_1, \cdot_1)$ dan $(\mathcal{S}_2, +_2, \cdot_2)$, serta homomorfisma semiring $\delta: \mathcal{S}_1 \rightarrow \mathcal{S}_2$. Jika $(\mathcal{S}_1, +_1, \cdot_1)$ merupakan semiring *clear*, maka *image* dari δ juga merupakan semiring *clear*.
3. Diberikan keluarga semiring $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Hasil kali kartesian dari keluarga semiring *clear* $\{\mathcal{S}_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ merupakan semiring *clear* terhadap operasi penjumlahan dan perkalian *pointwise* jika dan hanya jika setiap \mathcal{S}_i merupakan semiring *clear*.
4. Elemen $s \in \mathcal{S}$ *clear* jika dan hanya jika terdapat elemen unit u sedemikian sehingga us dan su adalah elemen bersih.

5. UCAPAN TERIMAKASIH

Pada bagian ini, Penulis menyampaikan banyak terima kasih kepada semua pihak yang telah membantu dalam penyusunan artikel ini. Terima kasih kepada Dr. Nikken Prima Puspita, M.Sc. selaku dosen pembimbing dan teman-teman, terkhusus anggota di Tim Aljabar dan Kombinatorik Undip, yang telah memberikan bimbingan, saran, dan dukungan yang sangat berharga. Tak lupa juga, penulis ingin mengucapkan terima kasih kepada keluarga yang selalu memberikan do'a, semangat, dan motivasi. Tanpa bantuan dan dukungan dari semua pihak, penyusunan artikel ini tidak akan dapat terlaksana dengan baik.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] S. Wahyuni, I. E. Wijayanti, D. A. Yuwaningsih, and A. D. Hartanto, *Teori Ring dan Modul*. Yogyakarta, Indonesia: Gadjah Mada Univ. Press, 2016.
- [2] H. S. Vandiver, "Note on a simple type of algebra in which the cancellation law of addition does not hold," *Vorlesungen Über Zahlen Und Funktionenlehre*, vol. 1, no. 1, pp. 4–30, 1934.
- [3] J. S. Golan, *Semirings and Their Applications*. Dordrecht, Netherlands: Springer, 1999. Available: <https://doi.org/10.1007/978-94-015-9333-5>
- [4] W. K. Nicholson, "Lifting idempotents and exchange rings," *Trans. Amer. Math. Soc.*, vol. 229, pp. 269–278, 1977. Available: <https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1977-0439876-2>
- [5] B. V. Zabavsky, O. V. Domsha, and O. M. Romaniv, "Clear rings and clear elements," *Mat. Stud.*, vol. 55, pp. 3–9, 2021.
- [6] S. Kar and D. Das, "Clean semiring", *Beitr. Algebra Geom.*, vol. 64, pp. 197–207, 2023. Available: <https://doi.org/10.1007/s13366-022-00628-0>
- [7] G. Ehrlich, "Unit regular rings," *Portugal. Math.*, vol. 27, pp. 209–212, 1968.
- [8] P. Ara, "Strongly π -regular rings have stable range one," *Proc. Amer. Math. Soc.*, vol. 124, no. 11, 1996.